UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS DE SINOP
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

GUSTAVO HENRIQUE COVAL GONÇALVES DA SILVA

A REALIDADE AUMENTADA E A CONSTRUÇÃO DE MODELOS MANIPULÁVEIS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

SINOP
2025

GUSTAVO HENRIQUE COVAL GONÇALVES DA SILVA

A REALIDADE AUMENTADA E A CONSTRUÇÃO DE MODELOS MANIPULÁVEIS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do departamento de Matemática da Universidade Estadual do Mato Grosso – UNEMAT, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Prof. Dr. Giovane Maia do Vale
Orientador

Prof. Dr. João Gabriel Ribeiro Damian
Coorientador

SINOP
2025

Ficha catalográfica elaborada pela Supervisão de Bibliotecas da UNEMAT Catalogação de Publicação na Fonte. UNEMAT - Unidade padrão

S586r Silva, Gustavo Henrique Coval Gonçalves da.
A REALIDADE AUMENTADA E A CONSTRUÇÃO DE MODELOS MANIPULÁVEIS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS / Gustavo Henrique Coval Gonçalves da Silva. - Sinop, 2025.
118f.: il.

Universidade do Estado de Mato Grosso "Carlos Alberto Reyes Maldonado", Matemática/SNP-PROFMAT - Sinop - Mestrado Profissional, Campus Universitário De Sinop.
Orientador: Prof. Dr. Giovane Maia do Vale.
Coorientador: Prof. Dr. João Gabriel Ribeiro Damian.

1. Ensino de Geometria. 2. Realidade Aumentada. 3. Modelos Manipuláveis. I. Vale, Prof. Dr. Giovane Maia do. II. Damian, Prof. Dr. João Gabriel Ribeiro. III. Título.

UNEMAT / MTSCB CDU 511.4

ESTADO DE MATO GROSSO
SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
FACET – FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL- PROFMAT
UNEMAT - SINOP

GUSTAVO HENRIQUE COVAL GONÇALVES DA SILVA

A REALIDADE AUMENTADA E A CONSTRUÇÃO DE MODELOS MANIPULÁVEIS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – ProfMat da Universidade do Estado de Mato Grosso/UNEMAT – Campus Universitário de Sinop, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador(a): Prof. Dr. Giovane Maia do Vale
Aprovado em 30/09/2025

BANCA EXAMINADORA

Giovane Maia do Vale
Prof. Dr. Giovane Maia do Vale
UNEMAT – SINOP - MT

João Gabriel Ribeiro Damian
Prof. Dr. João Gabriel Ribeiro Damian
UNEMAT – SINOP - MT

Inedio Arcari
Prof. Dr. Inedio Arcari
UNEMAT – SINOP - MT

Vlademir de Oliveira
Prof. Dr. Vlademir De Jesus Silva Oliveira
UFMT - SINOP - MT

Sinop/MT
2025

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a Deus, pela força e sabedoria em cada etapa desta jornada; aos meus pais, pelo amor incondicional, apoio e ensinamentos que me guiaram até aqui; aos meus familiares e amigos, que estiveram ao meu lado nos momentos de dificuldade e de conquistas; e, em especial, aos meus professores e colegas, cuja dedicação e incentivo foram essenciais para a realização deste sonho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me conceder saúde, força e serenidade para enfrentar os desafios desta caminhada acadêmica.

À minha família, pelo amor, paciência e incentivo constantes, que me sustentaram nos momentos de dificuldade e celebraram comigo cada conquista.

Ao meu orientador, professor Dr. Giovane Maia do Vale, pela orientação, dedicação, paciência e pelas valiosas contribuições que enriqueceram este trabalho.

Ao meu coorientador, professor Dr. João Gabriel Ribeiro Damian, pelo acompanhamento, pelas sugestões sempre pertinentes e pelo apoio constante durante o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos professores do programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, pelos ensinamentos compartilhados e pelo apoio ao longo deste percurso.

Aos colegas e parceiros de turma, com quem compartilhei aprendizados e desafios, e que ao longo dessa jornada se mostraram verdadeiros amigos; agradeço a parceria, companheirismo e apoio constante.

À instituição Universidade Estadual do Mato Grosso – UNEMAT e aos colaboradores que, direta ou indiretamente, contribuíram para essa conquista.

Por fim, a todos que, de alguma forma, participaram desta trajetória, deixo aqui minha sincera gratidão.

EPÍGRAFE

“A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo.”

— Galileu Galilei

RESUMO

A Matemática, conforme o senso comum, demanda do aluno um nível de abstração significativo para a compreensão e a apreensão de conteúdo. Tal pré-requisito é necessário mesmo no caso da Geometria, na qual alguns temas são mais palpáveis, dado o seu caráter intrínseco de descrição de entes físicos. No entanto, apesar da possibilidade de visualização de certas formas geométricas, ainda remanescem alguns problemas associados à compreensão de certas representações gráficas. Tal realidade se aplica à percepção espacial de sólidos geométricos e suas planificações. Buscado sanar ou mitigar este problema relativo ao ensino dos sólidos, na pesquisa aqui apresentada se elaborou uma metodologia de ensino que, por meio de uma sequência didática, se buscou aliar a visualização tridimensional de sólidos geométricos baseada em realidade aumentada, proporcionada pelo *software* educacional Sólidos RA, com a construção e manipulação física de modelos geométricos. Aliou-se à tais estratégias o cálculo de áreas e volumes, tendo por base, tanto os modelos digitais, quanto os modelos físicos. Com esta concatenação de métodos se almejou proporcionar um aprendizado mais ativo e significativo, que pudesse superar as limitações dos métodos tradicionais e que promovesse uma melhor compreensão das propriedades geométricas dos sólidos. Cabe especificar que, na elaboração da sequência didática se seguiu o preconizado pela BNCC (BRASIL, 2018) e se buscou atingir objetivos, bem como se desenvolver habilidades nela previstos. Para fins de experimentação e validação, a referida sequência didática foi trabalhada com 26 alunos de duas classes de 8º Ano do Ensino Fundamental do Colégio Inovação, do município de Guarantã do Norte – MT. Quando da experimentação, dados de opinião dos alunos foram coletados e técnicas estatísticas descritivas e inferenciais foram aplicadas a estes dados. Do processamento e análise dos dados chegou-se à conclusão da eficácia e consequente da validação da sequência didática, que se mostrou eficiente em mitigar os problemas inicialmente citados.

Palavras-chave: Ensino de Geometria, Realidade Aumentada, Modelos Manipuláveis, Estatística Descritiva e Inferencial.

ABSTRACT

Mathematics, according to common sense, demands a significant level of abstraction from students to understand and grasp content. This prerequisite is necessary even in Geometry, where some topics are more tangible, given their intrinsic nature as descriptions of physical entities. However, despite the possibility of visualizing certain geometric shapes, some problems associated with understanding certain graphical representations remain. This reality applies to the spatial perception of geometric solids and their flat patterns. Seeking to solve or mitigate this problem related to the teaching of solids, the research presented here developed a teaching methodology that, through a didactic sequence, sought to combine the three-dimensional visualization of geometric solids based on augmented reality, provided by the educational *software* Sólidos RA, with the construction and physical manipulation of geometric models. These strategies were combined with the calculation of areas and volumes, based on both digital and physical models. This combination of methods aimed to provide more active and meaningful learning, overcoming the limitations of traditional methods and fostering a better understanding of the geometric properties of solids. It is worth noting that the development of the teaching sequence followed the recommendations of the BNCC (BRASIL, 2018) and aimed to achieve the objectives and develop the skills required. For experimental and validation purposes, the teaching sequence was used with 26 students from two 8th-grade classes at Colégio Inovação, in the municipality of Guarantã do Norte, Mato Grosso. During the experiment, student opinion data were collected, and descriptive and inferential statistical techniques were applied to these data. Data processing and analysis led to the conclusion that the teaching sequence was effective and subsequently validated, proving effective in mitigating the problems initially cited.

Keywords: Teaching Geometry, Augmented Reality, Manipulable Models, Descriptive and Inferential Statistics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

É notório que o processo ensino-aprendizagem relacionado à Matemática demande do aluno um nível de abstração considerável para a compreensão e a apreensão de seus mais variados conteúdos. Tal pré-requisito é importante em áreas como, por exemplo, Estatística, Aritmética, Álgebra, Cálculo e Geometria. No caso da Geometria, mesmo que certos temas sejam mais palpáveis, dada a possibilidade de se visualizar certas construções geométricas, ainda remanescem alguns problemas, como é o caso da percepção espacial de sólidos geométricos e suas planificações. Neste contexto, cabe esclarecer que, o foco desta dissertação é voltado à Geometria (sólidos regulares) e que o interesse pelo tema desta dissertação surgiu da experiência do pesquisador em sala de aula, diante dos desafios enfrentados pelos alunos na visualização e compreensão de conceitos. Tal dificuldade evidencia a importância da busca por estratégias didáticas que aproximem os conceitos matemáticos da realidade dos estudantes, favorecendo a visualização e o entendimento.

Assim, a pesquisa aqui apresentada, desenvolvida no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT), no Campus Universitário de Sinop, versa sobre a integração entre a realidade aumentada (RA) e a construção de modelos manipuláveis como ferramentas didáticas para o ensino de sólidos geométricos.

Cabe lembrar que, os sólidos geométricos, definidos por Euclides na monumental obra “Os Elementos” como “aquilo que tem comprimento, largura e profundidade” (Bicudo, 2009), têm em sua concepção o grande entrave para a compreensão efetiva dos alunos. Para Rogenski e Pedroso (2009):

> Os alunos têm amplas dificuldades, primeiramente com relação à visualização e representação, pois reconhecem poucos conceitos da Geometria Básica e, por conseguinte, da Geometria Espacial. Também apresentam problemas de percepção das relações existentes entre os objetos e de identificação das propriedades das figuras que formam os sólidos, dentre outros conceitos. (Rogenski e Pedroso (2009) *apud* Melo, 2023, p.12).

Essa dificuldade de visualização de tais objetos tridimensionais muitas vezes interfere na compreensão de aspectos mais avançados e abstratos, como os cálculos de área e volume, prejudicando o desenvolvimento integral do conhecimento geométrico.

Visto que métodos tradicionais, com o professor como locutor, muitas vezes não funcionam tão bem, Fiorentini e Lorenzato (2007), D’Ambrósio (1996) e Bona (2012) *apud* Bona; Sousa, (2015, p. 240), afirmam que é urgente estudar formas de mobilizar os estudantes a participarem das aulas de Matemática, a fim de que se envolvam de forma ativa e realizem as atividades, se tornando os protagonistas de seu aprendizado. De acordo com a BNCC (BASE

NACIONAL COMUM CURRICULAR), o protagonismo do aluno é fundamental para o desenvolvimento de competências que o tornem autônomo, responsável e ativo em seu processo de aprendizagem (Brasil, 2018).

Diante dessa realidade vivenciada cotidianamente em sala de aula e considerando o contexto do mundo globalizado atual, que é caracterizado pela rápida e constante evolução tecnológica, surgiu a ideia de se utilizar ferramentas tecnológicas no ensino de Matemática, a fim de potencializar o aprendizado e mitigar as dificuldades enfrentadas pelos alunos.

Com essa perspectiva de inovação através de ferramentas tecnológicas, especificamente *softwares* educacionais, se viu algo potencialmente promissor e relativamente novo: a "Realidade Aumentada" (RA). Esta tecnologia integra objetos virtuais ao ambiente real imageado. Ou seja, quando do imageamento de algum ambiente real, o aplicativo gera visualizações em tela, trazendo para a realidade imageada elementos essencialmente digitais. Um exemplo bastante popular dessa tecnologia é o jogo eletrônico *Pokémon Go*™, que acrescenta à realidade imageada via *smartphone*, personagens fictícios (*pokémons*) que podem ser "capturados".

Dentre os *softwares* educacionais que materializam esta tecnologia destaca-se o aplicativo gratuito "Sólidos RA", disponível para dispositivos móveis. Com o uso de marcadores específicos (*QR codes*: *Quick Response Codes*), o *app* permite que sejam integrados diversos sólidos geométricos à tela dos *smartphones*, possibilitando diferentes formas de visualização e manipulação destes objetos virtuais, incluindo a visualização dos sólidos em suas formas planas (planificação). Diante das características do *software*, inferiu-se que se, mediante um planejamento adequado, o Sólidos RA possuísse o potencial de apoiar o processo ensino-aprendizagem, atuando como um recurso didático lúdico e atraente para os estudantes na visualização dos sólidos geométricos. O *software* consistiria então em um objeto de aprendizagem que poderia proporcionar um ambiente capaz de estimular a criatividade dos alunos, permitindo com que estes explorassem as formas e sólidos geométricos, ao favorecer uma compreensão mais efetiva de tais elementos.

Apesar do acima exposto, surge uma dúvida: será que a utilização da tecnologia por si só é realmente uma solução educacionalmente eficaz e suficientemente efetiva para eliminar as dificuldades enfrentadas pelos alunos? De toda a elucubração efetuada e do fato, de não se chegar a uma conclusão positiva para esta pergunta, surgiu então a ideia de se complementar o uso da tecnologia RA com a construção de modelos manipuláveis em papel, a partir dos quais os alunos poderiam efetuar medidas, recortando-os, colando-os e construindo os seus próprios modelos.

Assim, partindo da visualização preliminar, proporcionada pelo Sólidos RA, a construção de modelos manipuláveis se aliaria à estratégia didático-pedagógica no fomento ao engajamento dos estudantes às aulas, auxiliando-os no desenvolvimento de habilidades complementares às inicialmente fomentadas. Vale (2002, p. 8) expressa que:

> Os materiais manipuláveis são materiais concretos, de uso comum ou educacional, que permitem que durante uma situação de aprendizagem apelem para os vários sentidos dos alunos devendo ser manipulados e que se caracterizam pelo envolvimento ativo dos alunos. (Vale 2002, p. 8)

Nestes termos, além de se promover a participação ativa dos estudantes, desde a sua construção (mão-a-obra) até a sua aplicação pedagógica, os materiais manipuláveis acabariam por proporcionar também uma abordagem tátil-sensorial que auxiliaria na compreensão e na visualização dos sólidos, tornando possível ainda a constatação empírica de suas características e definições. Logo, infere-se que tal atividade deva facilitar a compreensão de conceitos abstratos e auxiliar no desenvolvimento do pensamento lógico formal dos alunos. Piaget (1970) sugeriu que: “as crianças não têm maturidade mental para apreender conceitos matemáticos abstratos apresentados somente por meio de palavras ou símbolos e precisam de muitas experiências com materiais concretos”. Sendo assim, depreende-se que os alunos precisem de vivências com materiais concretos que os auxiliarão na compreensão de noções matemáticas e espaciais. Colateralmente, estes alunos desenvolverão suas habilidades sensório-motoras, que os conduzirão à consolidação de raciocínio e de operações formais. Daí a importância do uso de materiais manipuláveis no processo ensino-aprendizagem.

Do exposto, especifica-se que a pesquisa aqui relatada consistiu na elaboração de uma metodologia de ensino que alia a visualização tridimensional, proporcionada pela RA, com a construção e manipulação física de modelos geométricos, complementada pelo cálculo de áreas e volumes. Tal concatenação de métodos visou proporcionar um aprendizado mais ativo e significativo, que pudesse superar as limitações dos métodos tradicionais e que promovesse uma melhor compreensão das propriedades geométricas dos sólidos.

Buscando validar tal metodologia de ensino, esta foi aplicada no Ensino Fundamental e se coletou dados por meio de questionário, os quais, após análise estatística descritiva e inferencial, demonstraram a eficácia da metodologia criada.

1.1 Trabalhos Relacionados

A presente seção tem como finalidade apresentar e discutir pesquisas que dialogam com a proposta desta dissertação, especialmente aquelas que tratam do uso da Realidade Aumentada (RA) e de recursos manipuláveis no ensino da Geometria Espacial. Esses trabalhos evidenciam diferentes abordagens metodológicas voltadas à exploração de sólidos geométricos, com foco na visualização tridimensional, no desenvolvimento da percepção espacial e na aprendizagem significativa. As produções analisadas destacam o potencial da RA como ferramenta didática inovadora, capaz de aproximar o aluno do objeto de estudo por meio da interação com modelos virtuais, ao mesmo tempo em que apontam a relevância do uso de materiais concretos no processo de construção do conhecimento geométrico.

Lima (2021), em sua dissertação intitulada “O uso da Realidade Aumentada no ensino de prismas: um referencial didático para professores do ensino médio”, desenvolveu uma proposta de ensino utilizando o recurso de Realidade Aumentada (RA) do *software* GeoGebra 3D, com o objetivo de apresentar um referencial didático para o ensino da Geometria no Ensino Médio. O autor destaca que a RA permite sobrepor objetos virtuais ao mundo real, promovendo maior interatividade e motivação dos alunos. A pesquisa foi fundamentada nas Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC’s) e alinhada à Base Nacional Comum Curricular (BNCC), especialmente nas habilidades relacionadas ao cálculo de áreas e volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos, e ao estudo do Princípio de Cavalieri. O trabalho inclui atividades práticas no GeoGebra 3D, demonstrando passo a passo a construção de prismas, sua planificação, o cálculo de diagonais e volumes, além de aplicações envolvendo o princípio de Cavalieri em ambientes tridimensionais e em Realidade Aumentada. Lima conclui que o uso do GeoGebra com RA representa uma ferramenta ousada e eficaz no ensino de Geometria, pois favorece a visualização espacial e uma aprendizagem mais ativa e significativa.

Souza (2022), em sua dissertação intitulada “A Realidade Aumentada e a Matemática: uma proposta para o ensino de Geometria Espacial”, apresentou uma sequência didática voltada ao ensino de sólidos geométricos com o uso do aplicativo GeoGebra AR. O objetivo do autor foi facilitar a visualização e a compreensão de figuras tridimensionais por meio da Realidade Aumentada, promovendo um aprendizado mais dinâmico e interativo. A proposta foi aplicada a alunos do ensino médio e incluiu atividades de observação, exploração e manipulação virtual de prismas, pirâmides e cilindros, associadas ao estudo de áreas e volumes. Souza destaca que o uso da RA potencializa o interesse dos estudantes e contribui para a melhoria da percepção espacial, uma vez que permite observar os sólidos de diferentes ângulos e escalas. O autor conclui que a tecnologia constitui um recurso didático eficaz para o ensino da Geometria Espacial, pois torna o processo de aprendizagem mais significativo e envolvente.

Souza (2021), em sua dissertação intitulada “A Realidade Aumentada e o Ensino de Geometria Espacial: uma proposta didática para o Ensino Médio”, desenvolveu uma proposta pedagógica voltada ao ensino de sólidos geométricos utilizando o GeoGebra 3D e o GeoGebra

AR. O trabalho teve como objetivo principal facilitar a visualização e a compreensão das figuras espaciais, promovendo um aprendizado mais dinâmico e interativo. A sequência didática elaborada pelo autor contempla atividades que exploram prismas, pirâmides, cilindros e cones, permitindo que os estudantes observem os sólidos de diferentes ângulos e compreendam suas características geométricas. Souza (2022) destaca que a Realidade Aumentada contribui significativamente para o engajamento dos alunos e para o desenvolvimento da percepção espacial, tornando o ensino de Geometria Espacial mais atrativo e eficaz. O autor conclui que o uso da RA, quando articulado a práticas investigativas, potencializa a aprendizagem e desperta o interesse dos estudantes pela matemática.

Santos (2015), em sua dissertação intitulada "Realidade Aumentada Aplicada ao Ensino de Geometria Espacial: um desafio para a Educação Matemática", desenvolveu uma proposta voltada ao uso da Realidade Aumentada como recurso pedagógico para melhorar a visualização e a compreensão dos sólidos geométricos. O autor destaca as dificuldades que alunos e professores enfrentam na interpretação de objetos tridimensionais e propõe a utilização de *softwares* de modelagem e animação, como SketchUp 7, 3D Studio Max e a biblioteca ARToolKit, além do ambiente FLARAS2, que possibilita a sobreposição de modelos virtuais ao ambiente real. Entre as atividades sugeridas, destaca-se um jogo educativo sobre planificações de poliedros regulares, desenvolvido com RA para auxiliar na fixação dos conteúdos. Santos (2015) conclui que a Realidade Aumentada constitui um importante aliado no ensino da Geometria Espacial, pois facilita a visualização tridimensional, torna as aulas mais dinâmicas e contribui para a aprendizagem significativa.

Guimarães (2022), em sua dissertação intitulada "Ensinando a Geometria Euclidiana no Ensino Fundamental por meio de recursos manipuláveis", propôs uma abordagem metodológica voltada ao uso de materiais concretos no ensino da Geometria. O trabalho foi desenvolvido com turmas do ensino fundamental e teve como objetivo tornar o aprendizado da geometria mais dinâmico e compreensível por meio da manipulação de objetos físicos, incentivando a descoberta e a construção ativa do conhecimento. As atividades envolveram o uso de modelos e figuras geométricas planas, permitindo aos alunos visualizar propriedades e relações espaciais de forma mais intuitiva. Embora o estudo não envolva o uso de tecnologias digitais, suas conclusões reforçam a importância dos recursos manipuláveis como meio de favorecer a aprendizagem significativa e aspecto que converge com a proposta deste trabalho, ao integrar modelos físicos e tecnologias de Realidade Aumentada no ensino de sólidos geométricos.

1.2 Objetivos

A pesquisa aqui relatada buscou alcançar os seguintes objetivos geral e específicos.

1.2.1 Objetivo Geral

Desenvolver e implementar uma proposta de ensino baseada na integração de realidade aumentada com a construção de modelos manipuláveis a fim de aprimorar o processo ensino-aprendizagem de sólidos geométricos (cubo, paralelepípedo, cilindro, cone e pirâmide). A proposta deve incluir atividades que promovam a visualização tridimensional interativa, a construção e manipulação física dos sólidos, e a compreensão de suas propriedades, com ênfase no cálculo de áreas e volumes.

1.2.2 Objetivos Específicos

A fim de se alcançar o objetivo geral expresso, os seguintes objetivos específicos foram propostos:

1. Implementar atividades diagnósticas para se identificar o conhecimento prévio dos alunos sobre sólidos, seus nomes, desenhos e planificações.
2. Buscar identificar as dificuldades enfrentadas pelos alunos no processo ensino-aprendizagem de sólidos geométricos, especialmente na visualização e compreensão tridimensional destes. As informações coletadas nos objetivos específicos 1 e 2 subsidiarão os objetivos específicos 3, 4 e 5.
3. Elaborar um conjunto de atividades que envolvam a realidade aumentada tendo por base o aplicativo Sólidos RA, com o objetivo de proporcionar aos alunos uma experiência interativa de visualização tridimensional.
4. Elaborar atividades de construção de modelos manipuláveis de sólidos (cubo, paralelepípedo, cilindro, cone e pirâmide) a partir de planificações prontas, objetivando reforçar o aprendizado prático.
5. Integrar, posteriormente, os cálculos de área e volume às atividades propostas nos objetivos específicos 3 e 4 para que os alunos apliquem esses conceitos na prática, medindo e calculando os modelos por eles construídos.
6. Validar a metodologia didática implementada, baseada na combinação entre a realidade aumentada, a construção de modelos manipuláveis e os cálculos geométricos no desenvolvimento da compreensão espacial e geométrica, por meio da análise Estatística Descritiva e Inferencial de dados coletados junto aos alunos por meio de questionário diagnóstico.

1.3 Estrutura do Trabalho

Este trabalho está estruturado em 6 capítulos, além das referências bibliográficas e apêndices. A seguir, apresenta-se uma breve descrição de cada um deles, com o intuito de orientar o leitor quanto ao conteúdo abordado neste documento.

O Capítulo 1 – Na "Introdução" se apresenta a contextualização do problema de pesquisa, destacando as dificuldades dos alunos no aprendizado de sólidos geométricos e a motivação para o uso da realidade aumentada e de modelos manipuláveis como recursos didáticos. São apresentados ainda os objetivos gerais e específicos, que nortearam a proposta.

O Capítulo 2 – A "Fundamentação Teórica" reúne os referenciais teóricos que sustentam a pesquisa. Inicialmente, é abordada a história da Geometria, desde suas origens nas civilizações antigas até o desenvolvimento na Grécia clássica. Em seguida, discute-se o ensino de Geometria à luz da BNCC, com destaque para as habilidades relacionadas ao estudo dos sólidos. Também são apresentados os conceitos, classificações e propriedades dos sólidos geométricos (como cubo, paralelepípedo, cilindro, pirâmide e cone), bem como o papel da realidade aumentada na educação e a importância dos modelos manipuláveis. Por fim, são introduzidos fundamentos básicos de estatística e testes de hipóteses, que foram utilizados na análise dos resultados.

O Capítulo 3 – Na "Metodologia" se descreve os procedimentos metodológicos utilizados na pesquisa. São detalhadas as estratégias adotadas para o levantamento teórico, a elaboração da sequência didática, os métodos de coleta de dados e a aplicação da proposta em sala de aula, com foco na análise qualitativa e quantitativa dos resultados.

O Capítulo 4 – No capítulo de "Desenvolvimento da Sequência Didática" se apresenta, passo a passo, a motivação e as causas teóricas que levaram à construção de cada etapa prevista na sequência.

O Capítulo 5 – A "Experimentação e Validação da Sequência Didática: Resultados e Discussões" reúne e analisa os dados coletados quando da aplicação da sequência didática. Discute-se os avanços na compreensão dos conteúdos geométricos e as contribuições da proposta para o processo ensino-aprendizagem. A análise estatística é utilizada para embasar a avaliação da eficácia da metodologia proposta.

O Capítulo 6 – Nas "Conclusões" são brevemente apresentados os principais resultados advindos da realização da pesquisa.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Os conteúdos apresentados neste capítulo são o resultado de pesquisas bibliográficas efetuadas em livros, artigos, dissertações, teses e *sites* de diversas instituições educacionais e tecnológicas. Na seção 2.1 estão presentes os principais tópicos associados à história da Geometria, com o foco em seus primórdios. Na seção 2.2 se discorre sobre o ensino de Geometria, tendo por alicerce os ditames da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Os principais sólidos geométricos, que estão diretamente associados à pesquisa realizada, estão descritos na seção 2.3. A realidade aumentada e suas nuances são pormenorizadas na seção 2.4. Na Seção 2.5 são apresentadas teorias educacionais que destacam a relevância dos modelos manipuláveis. Por fim, na seção 2.6 são apresentados os principais tópicos de teoria estatística, descritiva e inferencial, diretamente utilizados na pesquisa empreendida.

2.1 História da Geometria

Nesta seção, se descreve de modo conciso o desenvolvimento da Geometria na antiguidade, desde as suas origens mais remotas. Da análise da história, verifica-se que o mote de tal desenvolvimento está ligado, principalmente, às necessidades práticas das civilizações, como sugere etimologia da palavra Geometria, que significa "medir terras". Aqui são destacadas as contribuições significativas das civilizações egípcia, babilônica e grega que, por meio de suas práticas e registros, estabeleceram os fundamentos geométricos que influenciaram o pensamento matemático posterior, chegando até aos nossos dias.

2.1.1 Desenvolvimento da Geometria na Antiguidade

Etimologicamente a palavra Geometria origina-se do grego ‘Geometrein’ (ou, em grego: $\Gamma\varepsilon\omega\mu\varepsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha$), na qual ‘Geo’ significa ‘terra’ e ‘Metron’ significa ‘medir.’ Portanto, a palavra Geometria pode ser originalmente entendida como ‘medida da terra’ ou ‘medir terras’. Heródoto (485-420 a.C.), geógrafo e historiador grego. [..], “Relacionou a origem da Geometria às constantes medições de terra ocasionadas pelas cheias anuais do Rio Nilo, que levavam consigo as marcações anteriores” (Neto, 2016, p. 91).

Do acima exposto, depreende-se que o pensamento matemático tenha suas raízes profundamente estabelecidas na antiguidade, sendo esta a base do que hoje conhecemos. Assim, o conhecimento matemático contemporâneo é o resultado dos estudos e contribuições de diversas civilizações como, o Egito antigo, a Mesopotâmia e a Grécia. Cada uma dessas culturas desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento de conceitos e métodos matemáticos basilares, que foram gradualmente sistematizados e aprimorados ao longo dos séculos.

A civilização egípcia floresceu nas margens do rio Nilo, na região conhecida como Crescente Fértil, cujas terras fecundas permitiram o desenvolvimento de uma agricultura próspera. Como o destacado por Heródoto anteriormente, essa prosperidade agrícola criou a necessidade de se ter ferramentas para medições precisas, o que impulsionou o surgimento e o avanço do conhecimento matemático Tal fato é enfatizado por Bueno *et al.* (2018):

> O desenvolvimento matemático no Egito era estimulado por problemas cotidianos, então muitos processos geométricos envolviam cálculo de volume de grãos, necessário para o comércio e a agricultura, cálculo da inclinação da face lateral e do volume do tronco da pirâmide e cálculo das áreas das terras para a divisão de território. (Bueno *et al.*, 2018, p. 7).

Grande parte do que conhecemos hoje sobre as histórias e contribuições da civilização egípcia deve-se aos registros em papiros, um tipo de "papel" produzido a partir de uma planta específica, o *Cyperus papyrus*. Entre os muitos papiros descobertos, destacam-se o Papiro Rhind e o Papiro Moscou, que fornecem valiosas informações sobre a Matemática e a cultura dessa antiga civilização.

"O Papiro Rhind foi um documento egípcio datado em 1650 a.C., grafado com a escrita hieroglífica pelo escriba Ahmes e comprado pelo escocês Alexander Henry Rhind por volta de 1858 em Luxor, no Egito." (Bueno *et al.*, 2018, p. 8). Esse importante documento contém 85 problemas matemáticos, dos quais muitos estão relacionados à Geometria. Segundo Bueno *et al.* (2018), esses problemas surgiram da necessidade de se sobrepujar obstáculos práticos, levando à busca por "alguma fórmula ou método para resolver os assuntos como: o preço do pão, armazenamento dos grãos de trigo, alimentação do gado entre outros problemas ligados a agricultura e comércio".

O Papiro Moscou, outro importante documento egípcio, contém 25 problemas e conta também com fórmulas para o cálculo do volume do tronco de uma pirâmide. Essa contribuição foi destacada por Bueno *et al.* (2018, p. 11), que expressam que: "O Papiro Moscou é considerado o segundo papiro mais importante da época e ele é um pouco mais antigo que o Papiro de Rhind, foi escrito com menos cuidado, quando comparado à obra de Ahmes por um escriba desconhecido cerca de 1850 a.C".

A Matemática no Antigo Egito, evidenciada pelos papiros Rhind e Moscou, destaca a aplicação prática do conhecimento matemático em resposta a desafios cotidianos, como a medição de terras e o comércio. Esses documentos não apenas revelam a sofisticação da Geometria egípcia, mas também seu impacto duradouro nas civilizações futuras, como o destacado por Bueno *et al.* (2018):

> Podemos ver que os problemas escritos sobre Geometria nos papiros referem-se a problemas de volumes e áreas de figuras planas. Calculava-se as áreas de retângulos,

> triângulos e trapézios com precisão pelo método de decomposição e recomposição de figuras; obtiveram valores aproximados para π, englobaram métodos para o cálculo de volume de pirâmide, do cilindro e talvez a área de um hemisfério. Eles utilizavam o método usual de hoje: produto da área da base pela altura para determinar o volume de um bloco retangular ou paralelepípedo. Assim, determinavam a capacidade dos recipientes cilíndricos. (Bueno *et al.* 2018, p. 11).

Por sua vez, a civilização babilônica, situada nas margens do rio Eufrates, na região da Mesopotâmia, destacou-se como uma sociedade próspera devido à fertilidade da região e às importantes rotas comerciais que para ali convergiam. Nesse contexto, Rodrigues (2020) enfatiza que “a Matemática babilônica, especialmente a Geometria, foi um campo de estudo que merece seu devido destaque”.

Ao contrário dos egípcios, os babilônios registravam suas anotações por meio da escrita cuneiforme em tabuletas de argila como informa Eves (2011).

> Os arqueólogos vêm trabalhando na Mesopotâmia sistematicamente desde antes da metade do século XIX, tendo já desenterrado mais de meio milhão de tábulas de argila. Somente no sítio da antiga Nipur foram escavadas mais de 50 000 tábulas. Os museus de Paris, Berlim e Londres e as Universidades de Yale, Colúmbia e Pensilvânia têm excelentes coleções dessas tábulas. Estas são de tamanho variável, desde as pequenas de umas poucas polegadas quadradas até algumas do tamanho aproximado deste livro, sendo a espessura destas últimas, em torno de seu centro, de aproximadamente uma polegada e meia. Os escritos às vezes aparecem em apenas uma das faces da tabula, às vezes em ambas e frequentemente em seu contorno arredondado. Das cerca de meio milhão de tábulas, quase 400 foram identificadas como estritamente matemáticas, constituídas que são de tábuas e listas de problemas matemáticos. (Eves, 2011, p. 59-60, *apud* Vaz, Freitas e Jesus 2019 p. 2)

Entre as diversas tabuletas de argila, destaca-se a Plimpton 322, mencionada por Vaz, Freitas e Jesus (2019), que afirmam: "A tábua foi escrita no período Babilônico Antigo (aproximadamente entre 1900 e 1600 a.C.) [...] e descreve várias ternas de números que posteriormente seriam chamadas de ternas pitagóricas". Eves (2011) também ressalta a ampla utilização da Geometria pelos babilônios.

> De numerosos exemplos concretos infere-se que os babilônios do período 2000 a.C. a 1600 a.C. deviam estar familiarizados com as regras gerais da área do retângulo, da área do triângulo retângulo e do triângulo isósceles (e talvez da área de um triângulo genérico), da área de um trapézio retângulo, do volume de um paralelepípedo reto-retângulo e, mais geralmente, do volume de um prisma reto de base trapezoidal. Considerava-se uma circunferência como o triplo de seu diâmetro e a área do círculo como um duodécimo da área do quadrado de lado igual à circunferência respectiva (regras corretas para = 3) e se obtinha o volume de um cilindro circular reto como o produto da base pela altura. O volume de um tronco de cone e o de um tronco de pirâmide quadrangular regular eram calculados erradamente como o produto da altura pela semissoma das bases. Os babilônios também tinham conhecimento de que os lados correspondentes de dois triângulos retângulos semelhantes são proporcionais, que a perpendicular baixada do vértice de um triângulo isósceles em que incidem os lados congruentes divide ao meio a base e que um ângulo inscrito numa semicircunferência é reto. E conheciam o teorema de Pitágoras. (Eves, 2011, p. 60, *apud* Vaz, Freitas e Jesus 2019, p. 3).

Em síntese, a civilização babilônica fez avanços notáveis no campo da Matemática, especialmente na Geometria. Através de suas tabuletas de argila, eles registraram métodos e problemas que evidenciam um profundo conhecimento matemático para a época. Além de terem compreendido conceitos geométricos relacionados a áreas e volumes, os babilônios também utilizaram relações proporcionais em triângulos semelhantes e aplicaram, ainda que de forma empírica, o teorema de Pitágoras séculos antes de seu reconhecimento formal. Esses registros não apenas refletem a habilidade matemática dos babilônios, mas também sua influência duradoura na história da Matemática, deixando um legado que contribuiu significativamente para o desenvolvimento das ciências exatas nas civilizações subsequentes.

É reconhecido que a Grécia Antiga representa o berço da Matemática moderna, sendo em particular o cerne para o desenvolvimento da Geometria (Boyer, 1974, *apud* Martins, Lopez e Darsie, 2023). Isso se deve às concepções e contribuições de diversos matemáticos gregos dentre os quais destacam-se Euclides, com sua monumental obra 'Os Elementos', e Platão, com sua filosofia sobre a perfeição das formas geométricas, a qual influenciou o seu pensamento matemático.

O progresso da Geometria na Grécia antiga teve início com as primeiras tentativas de mensuração e desenho de formas geométricas (Eves, 2004, *apud* Martins, Lopes e Darsie, 2023). Foram os gregos que desenvolveram um processo formal para a Geometria, introduzindo definições e conceitos que permanecem fundamentais até os dias de hoje, como o destacado por Martins, Lopes e Darsie (2023).

> O progresso da Geometria na Grécia antiga foi um marco notável na história da Matemática e da ciência em geral. Os gregos antigos estabeleceram um sistema formal para a Geometria, que ainda é estudado e utilizado atualmente, e sua influência pode ser percebida em várias áreas da cultura e da sociedade. A Geometria grega antiga é um testemunho da habilidade e do gênio dos matemáticos da época, sendo um legado duradouro para a humanidade. (Martins, Lopes e Darsie, 2023, p. 6).

Euclides um dos grandes matemáticos da Grécia antiga, nasceu em Alexandria por volta de 325 a.C. e a influência das civilizações como, Egito e Mesopotâmia, é visível em seus trabalhos, que incorporaram conceitos e técnicas dessas culturas em sua abordagem matemática" (MONTOITO; GARNICA, 2014, *apud* MARTINS, LOPES e DARSIE, 2023).

Como o mencionado anteriormente, dentre as inúmeras obras de Euclides, destaca-se 'Os Elementos' que, de acordo com Martins, Lopes e Darsie (2023), representa uma das maiores contribuições para a sistematização da Geometria, sendo referência até os dias atuais. Martins, Lopes e Darsie (2023) expressam que:

> Um marco na literatura matemática, que é ainda considerado um dos mais influentes tratados de Geometria da história. Nesta obra, Euclides apresenta uma série de definições, postulados e teoremas que estabelecem as bases da Geometria euclidiana, a qual são estudadas na escola atualmente. (Martins, Lopes e Darsie, 2023, p. 10).

Euclides ao adotar uma abordagem rigorosa na representação de seus resultados, constrói diversos postulados e axiomas que servem como base para a Geometria que conhecemos. Martins, Lopes e Darsie (2023) destacam que:

> O maior triunfo de “Os Elementos” é a sua abordagem sistemática ao estudo da Geometria. Euclides inicia sua obra com definições simples e básicas. A partir delas, ele estabelece axiomas e postulados, que são verdades matemáticas absolutas e auto evidentes, que não necessitam de demonstração. Sendo uma construção lógica meticulosa, em que cada teorema é deduzido a partir dos postulados iniciais. Esta estrutura tem uma estrutura ordenada e mostra o entendimento do método científico.

Somando-se a Euclides, tem-se Platão. Este vulto nasceu em Atenas por volta de 427/428 a.C. e, como um dos grandes filósofos da história, é conhecido por sua abordagem que integra a filosofia à Matemática. Platão via a Geometria como uma forma de estabelecer relações entre as formas, e que essas relações eram a base para a compreensão da ordem do universo (Reale; Antiseri, 2003, *apud* Martins, Lopes e Darsie, 2023).

Em várias de suas obras, a importância da Geometria na filosofia de Platão é evidente. Na obra “República”, Platão usa a Geometria como uma metáfora para a organização da sociedade. Ele utiliza a Geometria para estabelecer uma hierarquia social, na qual as pessoas são colocadas em diferentes níveis de acordo com suas habilidades e talentos” (Martins, Lopes e Darsie, 2023, p. 8). Em “Timeu”, Platão usa a Geometria para explicar a criação do universo. Ele acredita que o universo foi criado por um demiurgo ou artífice, que utilizou a Geometria para criar as formas e as proporções do universo (Martins, Lopes e Darsie 2023, p. 8). Platão não apenas reconheceu a importância da Geometria em sua filosofia, como também enfatizou sua aplicação prática na formação de cidadãos virtuosos. Para ele, o estudo da Geometria era essencial para o desenvolvimento intelectual.

Do exposto, pôde-se depreender que, a Geometria, cuja etimologia revela suas raízes na medição da terra, é um campo que remonta a antiguidade, refletindo a necessidade das civilizações antigas em lidar com desafios práticos, como a agricultura e o comércio. As contribuições significativas de culturas como a egípcia e a babilônica, evidenciadas através de documentos como os papiros Rhind e Moscou, e as tabuletas de argila, mostraram o desenvolvimento de métodos geométricos fundamentais. Esses conhecimentos foram posteriormente sistematizados pelos gregos, cujas obras, especialmente as de Euclides, em "Os Elementos", e as reflexões filosóficas de Platão, estabeleceram as bases da Geometria moderna. Esse percurso histórico ilustra não apenas a evolução do pensamento matemático, mas também a interconexão entre a Matemática e Filosofia, que moldou a compreensão do universo e a estrutura social da época.

2.2 O Ensino de Geometria: Aspectos Educacionais

Conforme o mencionado anteriormente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo que define as competências e habilidades fundamentais a serem desenvolvidas pelos estudantes em todas as áreas do conhecimento ao longo de sua trajetória escolar, visando uma formação integral. No total, a BNCC (Brasil, 2018) estabelece dez competências gerais, apresentadas no Quadro 1.

Quadro 1: Competências gerais expressas na BNCC

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social e cultural para entender e explicar a realidade (fatos, informações, fenômenos e processos linguísticos, culturais, sociais, econômicos, científicos, tecnológicos e naturais), colaborando para a construção de uma sociedade solidária.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e inventar soluções com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Desenvolver o senso estético para reconhecer, valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também para participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar conhecimentos das linguagens verbal (oral e escrita) e/ou verbo-visual (como Libras), corporal, multimodal, artística, matemática, científica, tecnológica e digital para expressar-se e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e, com eles, produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Utilizar tecnologias digitais de comunicação e informação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas do cotidiano (incluindo as escolares) ao se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos e resolver problemas.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao seu projeto de vida pessoal, profissional e social, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos e a consciência socioambiental em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas e com a pressão do grupo.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de origem, etnia, gênero, orientação sexual, idade, habilidade/necessidade, convicção religiosa ou de qualquer outra natureza, reconhecendo-se como parte de uma coletividade com a qual deve se comprometer.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões, com base nos conhecimentos construídos na escola, segundo princípios éticos democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Fonte: elaborado pelo autor com base em Brasil (2018).

Essas competências têm como objetivo desenvolver nos estudantes habilidades essenciais para sua formação integral, preparando-os para os desafios do mundo moderno. Além disso, buscam estimular o pensamento crítico, a autonomia, a convivência harmoniosa em sociedade e o uso responsável das tecnologias. “Ao definir essas dez competências, a BNCC assume que a educação deve afirmar valores e estimular ações que contribuam para a transformação da sociedade, tornando-a mais humana, socialmente justa e, também, voltada para a preservação da natureza” (Brasil, 2013 *apud* Brasil, 2018, p. 19).

Além das competências acima expostas, a BNCC estabelece habilidades a serem desenvolvidas em todas as series/anos escolares. Estas habilidades são organizadas de forma a assegurar a progressão do aprendizado ao longo da vida escolar. A cada nova série, os estudantes desenvolvem novas habilidades que visam complementar e aprimorar as habilidades adquiridas nos anos anteriores, permitindo uma evolução contínua e estruturada dos conteúdos abordados em todos os componentes curriculares.

“Na definição das habilidades, a progressão ano a ano se baseia na compreensão e utilização de novas ferramentas e também na complexidade das situações-problema propostas, cuja resolução exige a execução de mais etapas ou noções de unidades temáticas distintas” (Brasil, 2018, p. 231).

Para o componente curricular de Matemática, a BNCC propõe cinco unidades temáticas, correlacionadas, que orientam a formulação das habilidades a serem desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental e médio (Brasil, 2018, p. 224), as quais estão apresentadas no

Quadro 2. A divisão em unidades temáticas, conforme destaca Brasil (2018), visa facilitar a compreensão dos conjuntos de habilidades e a forma como eles se inter-relacionam.

Quadro 2: Unidades Temáticas BNCC para a Matemática

Números: tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos, e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades.
Álgebra: por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos.
Geometria: envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento.
Grandezas e medidas: ao propor o estudo das medidas e das relações entre elas – ou seja, das relações métricas – se favorece a integração da Matemática a outras áreas de conhecimento, como Ciências (densidade, grandezas e escalas do Sistema Solar, energia elétrica etc.) ou Geografia (coordenadas geográficas, densidade demográfica, escalas de mapas e guias etc.).
Probabilidade e Estatística: aqui se propõe a abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações-problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia.

Fonte: elaborado pelo autor com base em Brasil (2018).

A inter-relação entre os conteúdos pode ser percebida ao se analisar unidades temáticas como, Geometria e Grandezas e Medidas, que estão no cerne deste trabalho. Os estudos voltados para o cálculo de áreas e volumes de sólidos geométricos, por exemplo, estão inseridos na unidade de Grandezas e Medidas, conforme estabelecido pela Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018).

> Em relação ao pensamento geométrico, eles desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança.
> No que se refere a Grandezas e Medidas, os estudantes constroem e ampliam a noção de medida, pelo estudo de diferentes grandezas, e obtêm expressões para o cálculo da medida da área de superfícies planas e da medida do volume de alguns sólidos geométricos. (Brasil, 2018, p. 517).

A partir dessa estrutura, no Quadro 3 são apresentas as habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) relacionadas ao ensino de áreas de figuras planas, sólidos geométricos e cálculos de volumes que contemplam as unidades temáticas "Geometria" e "Grandezas Medidas", para os anos iniciais do ensino fundamental do 3° ao 5° ano.

Quadro 3: Habilidades para anos iniciais do ensino fundamental do 3° ao 5° ano

Série	Habilidade	Objetos de Conhecimento
3° Ano	(EF03MA13) Associar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera) a objetos do mundo físico e nomear essas figuras; (EF03MA14) Descrever características de algumas figuras geométricas espaciais (prismas retos, pirâmides, cilindros, cones), relacionando-as com suas planificações	Figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera): reconhecimento, análise de características e planificações.
4° Ano	(EF04MA17) Associar prismas e pirâmides a suas planificações e analisar, nomear e comparar seus atributos, estabelecendo relações entre as representações planas e espaciais.	Figuras geométricas espaciais (prismas e pirâmides): reconhecimento, representações, planificações e características.
5° Ano	(EF05MA16) Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos. (EF05MA21) Reconhecer volume como grandeza associada a sólidos geométricos e medir volumes por meio de empilhamento de cubos, utilizando, preferencialmente, objetos concretos.	Figuras geométricas espaciais: reconhecimento, representações, planificações e características, e noção de volume.

Fonte: elaborado pelo autor com base em Brasil (2018).

Seguindo essa mesma perspectiva, no Quadro 4 se apresenta as habilidades previstas para os anos finais do Ensino Fundamental, distribuídas do 6º ao 9º ano, evidenciando uma progressão contínua dos conteúdos iniciados nos anos anteriores.

Quadro 4: Habilidades BNCC para o ensino de áreas de figuras planas e sólidos geométricos

Série	Habilidade	Objetos de Conhecimento
6° Ano	(EF06MA16) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.	Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas)
7° Ano	(EF07MA24) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro	Cálculo de volume de blocos retangulares, utilizando unidades de medida convencionais mais usuais

	cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico).	
8° Ano	(EF08MA16) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos. (EF08MA17) Reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico, para resolver problemas de cálculo de capacidade de recipientes cujo formato é o de um bloco retangular ou de um cilindro reto. (EF08MA18) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de um cilindro reto ou a capacidade de um recipiente cujo formato é o de um cilindro reto.	Área de figuras planas, área do círculo e comprimento de sua circunferência, volume de cilindro reto e medidas de capacidade
9° Ano	(EF09MA18) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.	Volume de prismas e cilindros

Fonte: elaborado pelo autor com base em Brasil (2018).

Para o Ensino Médio, a BNCC propõe habilidades que visam a ampliação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental. A expectativa é que, com base nas vivências e nos conceitos já explorados, os estudantes desenvolvam um pensamento matemático mais crítico e aplicado, sendo capazes de utilizar a Matemática de forma prática em diferentes contextos reais, conforme exposto por Brasil (2018).

> [...] no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, conforme anteriormente anunciado. Nesse contexto, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio, envolvidos, em diferentes graus dados por suas condições socioeconômicas, pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. (Brasil 2018, p. 518).

Nesse contexto, é fundamental que o ensino de Matemática vá além da memorização de fórmulas e procedimentos, promovendo o desenvolvimento de competências que possibilitem aos estudantes compreenderem e aplicarem os conceitos matemáticos em situações reais. A Matemática deve ser apresentada como uma ferramenta para a análise crítica da realidade, incentivando a autonomia intelectual e a capacidade de argumentação. Nesse sentido, é essencial que os processos de aprendizagem envolvam situações que desafiem os alunos a pensarem, investigarem, proporem soluções e validarem ideias por meio da reflexão e do diálogo. Na BNCC se expressa que:

> Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (Brasil, 2018, p. 519).

Diante do exposto, a BNCC estabelece as seguintes habilidades a serem desenvolvidas ao longo dos três anos do Ensino Médio, conforme o apresentado no Quadro 5.

Quadro 5: Habilidades a serem desenvolvidas ao longo dos 3 anos do ensino médio

(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados.
(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras
(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais, como o remanejamento e a distribuição de plantações, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Fonte: elaborado pelo autor com base em Brasil (2018).

Com isso, a BNCC assegura que todos os estudantes do Brasil tenham acesso a um currículo estruturado, promovendo uma aprendizagem significativa em todas as áreas do conhecimento. Essa abordagem visa garantir a progressão anual das habilidades, e também torna o processo educativo mais inclusivo, significativo e voltado para o desenvolvimento integral dos estudantes.

Dessa forma, é possível perceber que a BNCC apresenta uma estrutura articulada e progressiva para o ensino da Matemática, especialmente no que diz respeito à Geometria e ao estudo de grandezas e medidas. Ao longo da educação básica, desde os anos iniciais até o Ensino Médio, os estudantes são estimulados a construírem e aprofundarem seus conhecimentos de maneira gradual, desenvolvendo habilidades que vão desde o reconhecimento de formas geométricas até a resolução de problemas complexos do cotidiano. Com base nessa organização, é possível planejar propostas pedagógicas que não apenas respeitem as diretrizes nacionais, mas também promovam um ensino mais contextualizado, crítico e significativo, capaz de despertar o interesse dos alunos e contribuir efetivamente para sua formação integral.

2.3 Sólidos Geométricos

Nesta seção, são apresentadas e discutidas as definições e características dos sólidos geométricos, abordando conceitos fundamentais, como área e volume. Além disso, são exploradas as propriedades essenciais que envolvam arestas, vértices e faces. Entende-se que a compreensão dessas características, aliada à visualização tridimensional dos sólidos seja crucial para uma análise mais profunda de suas formas e de possíveis aplicações no mundo real. Almeja-se que essa análise possa contribuir para o entendimento das relações geométricas de modo mais efetivo.

2.3.1 Sólidos Geométricos: Conceitos Gerais e Características

Os sólidos geométricos são entes tridimensionais que possuem volume e ocupam lugar no espaço. Ao contrário das figuras planas, que têm apenas duas dimensões (altura e largura), os sólidos apresentam três dimensões: comprimento, largura e altura. Essas características os tornam elementos fundamentais no estudo da Geometria Espacial, que é o ramo da Matemática que investiga as formas no espaço tridimensional. Cada sólido geométrico é constituído por elementos básicos que o definem, os quais são: faces, arestas e vértices. Esses componentes são essenciais para a identificação, construção e classificação das formas espaciais.

Quanto à classificação, os sólidos podem ser agrupados em duas categorias principais: poliedros e corpos redondos. Os poliedros são formados apenas por faces planas e fechadas por segmentos de reta. Entre eles, destacam-se os prismas, como o cubo e o bloco retangular (ou paralelepípedo), e as pirâmides, que possuem uma base poligonal e faces laterais triangulares que convergem para um vértice comum. Já os corpos redondos são sólidos que apresentam superfícies curvas. Nessa classe estão o cilindro, o cone e a esfera. Eles não possuem arestas nem vértices no sentido tradicional, o que os diferencia estruturalmente dos poliedros.

Na Matemática, arestas, vértices e faces são elementos fundamentais para a descrição dos sólidos geométricos. Na Geometria Espacial, face é cada uma das superfícies planas que delimitam o sólido. Nos poliedros, todas as faces são polígonos, por exemplo, no cubo as faces são quadradas. Nos corpos redondos, como cilindros e cones, podem existir faces planas (as bases) e superfícies curvas. Cabe especificar que, o termo "face" se refere exclusivamente às regiões planas. Formalmente, define-se face como cada uma das regiões bidimensionais planas que compõem a superfície externa de um sólido geométrico.

A aresta corresponde ao segmento de reta onde duas faces planas se encontram. Nos poliedros, as arestas formam as bordas das faces. Já em sólidos que possuem superfícies curvas, como cilindros e cones, as extremidades curvas, por exemplo, o contorno da base circular, não são consideradas arestas, uma vez que não são segmentos retilíneos. De forma precisa, aresta é definida como o segmento de reta resultante da interseção de duas faces planas adjacentes em um sólido geométrico.

O vértice é o ponto de encontro de três ou mais arestas. Ele é o extremo do sólido, para onde convergem as faces e as arestas. Nos poliedros, cada vértice é geometricamente definido pela interseção de suas arestas e faces. Em sólidos com superfícies curvas, como o cone, existe apenas um vértice, localizado no ponto oposto a base. Assim, pode-se definir vértice como o ponto comum a três ou mais arestas de um sólido geométrico.

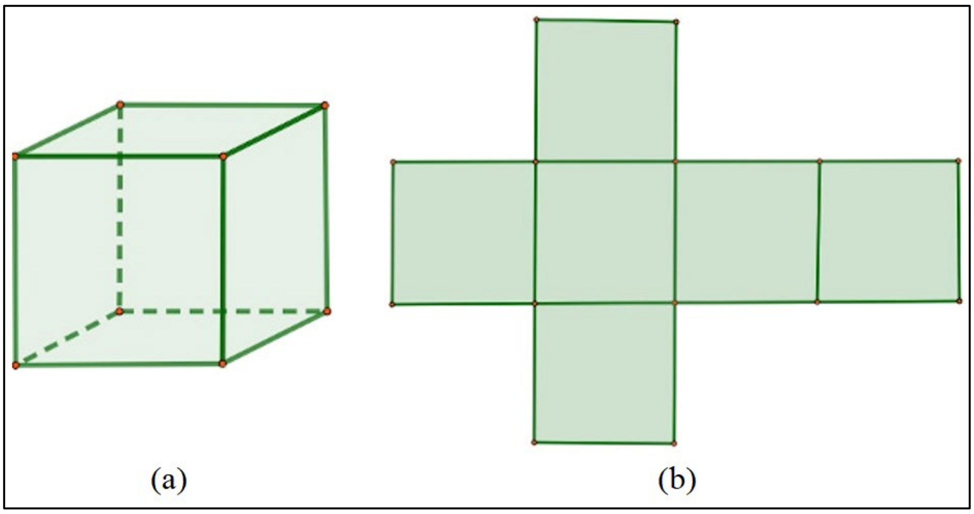
2.3.2 Sólidos Geométricos: Definição e Características Particulares

Nas subseções que seguem se explana sobre os sólidos geométricos que foram o foco da pesquisa realizada, os quais são: cubo, paralelepípedo, cilindro reto, pirâmide quadrangular e cone. As definições e características destes sólidos são dadas sempre no sentido de se gerar um aporte teórico, que foi necessário ao desenvolvimento da pesquisa executada.

2.3.2.1 Cubo

O cubo, ilustrado na Figura 1(a), é um dos sólidos geométricos mais simples e fundamentais no estudo da Geometria e é classificado como um poliedro regular. Definido por Euclides em sua obra "Os Elementos", o cubo possui seis faces quadradas e congruentes, além de doze arestas de igual comprimento e oito vértices, resultantes do encontro de três faces adjacentes. Estas faces formam, duas a duas, ângulos retos. Essa simetria e simplicidade tornam o cubo essencial na compreensão das propriedades e relações entre sólidos geométricos.

Figura 1: Representação gráfica de um cubo e sua planificação



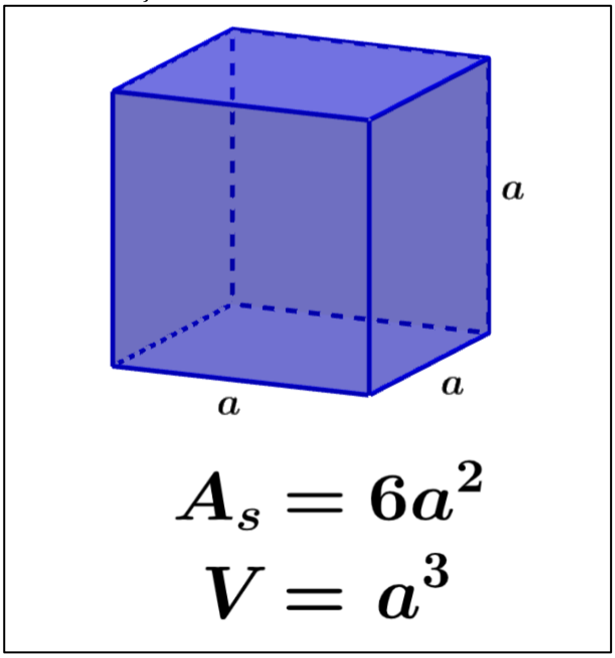
Fonte: adaptado de Brasil Escola (2024)

A superfície do cubo pode ser entendida com o auxílio de sua planificação (Figura 1(b)), que consiste em seis faces quadradas congruentes.

Para se calcular a área total de sua superfície do cubo, primeiro se calcula a área de uma de suas faces. Sendo a o comprimento do lado do quadrado, a área de uma face é dada por a^2. Como todas as faces são iguais, basta multiplicar a área de uma face por 6, resultando em $A_S = 6a^2$, para se ter a área total do cubo (A_S), como o expresso na Figura 2.

O volume de um sólido pode ser definido como o espaço tridimensional que ele ocupa. No caso de um cubo, para se calcular seu volume, multiplica-se suas três dimensões (altura, largura e profundidade). Como todos os lados do cubo possuem a mesma medida, representada por a, a fórmula do volume (V) é dada por $V = a \cdot a \cdot a$ ou, simplificadamente, $V = a^3$, como o representado na Figura 2.

Figura 2*:* Ilustração relativa à área e ao volume de um cubo

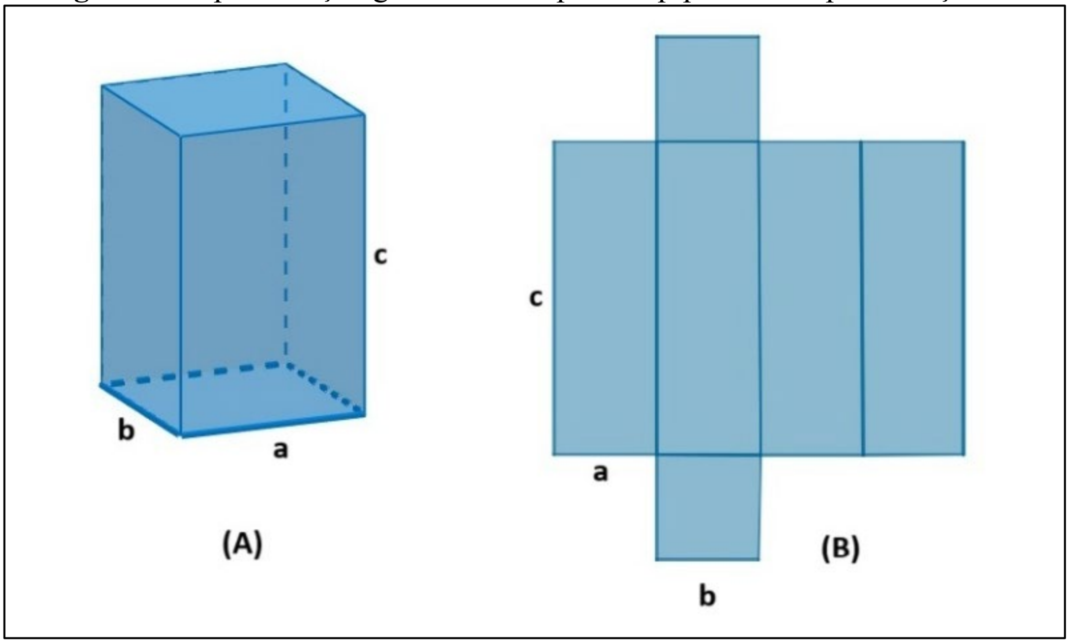


Fonte: Neurochispas (2024).

2.3.2.2 Paralelepípedo (bloco retangular)

O paralelepípedo, ilustrado na Figura 3(A), é um sólido geométrico amplamente estudado em Geometria devido à sua versatilidade e frequência em contextos cotidianos. Ele é classificado como um prisma reto cujas bases e faces laterais são paralelogramos. Mais especificamente, no caso mais comum, este se apresenta como um bloco retangular, no qual todas as seis faces são retângulos. O paralelepípedo é composto por seis faces, que se dispõem em pares opostos e congruentes, doze arestas, agrupadas em três conjuntos com 4 arestas de comprimentos iguais, e oito vértices, sendo que cada vértice é a interseção de três arestas adjacentes. As faces adjacentes formam entre si ângulos retos, característica que assegura a ortogonalidade de suas dimensões principais.

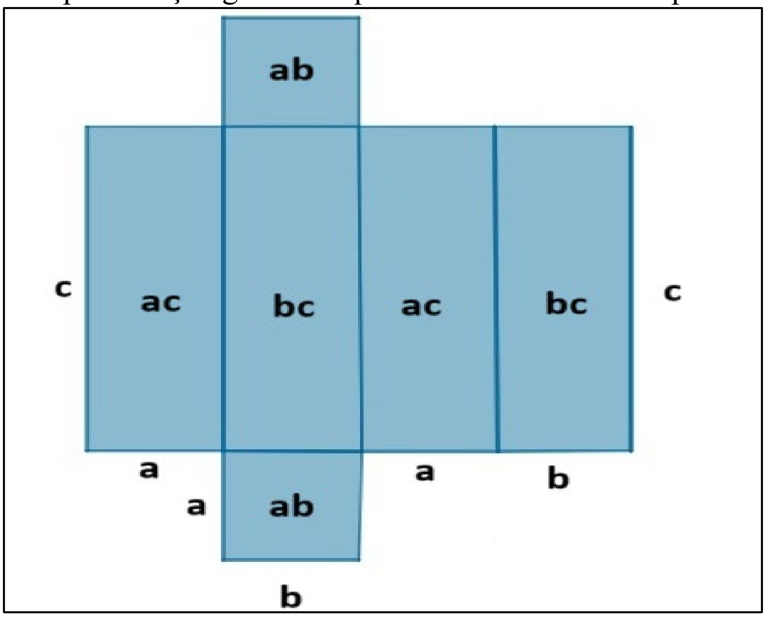
Figura 3: Representação gráfica de um paralelepípedo e sua planificação.



Fonte: adaptado de Escola Kids (2024).

A superfície do paralelepípedo pode ser mais bem compreendida por meio de sua planificação, ilustrada na Figura 3(B) ou, mais detalhadamente na Figura 4. A planificação do paralelepípedo é composta por seis faces retangulares, sendo que faces opostas são congruentes entre si.

Figura 4: Representação gráfica esquemática da área de um paralelepípedo.



Fonte: adaptado de Escola Kids (2024)

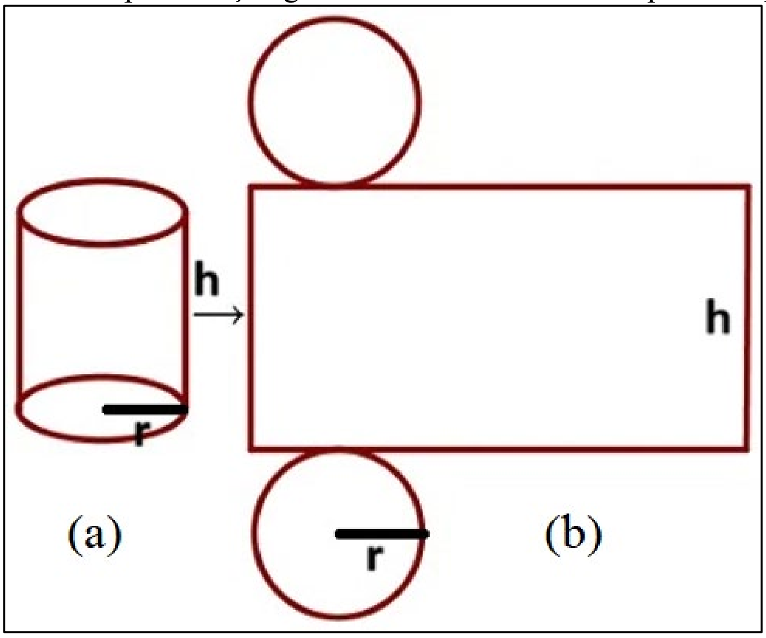
Para o cálculo da área total da superfície de um paralelepípedo, é necessário determinar a área de cada uma de suas faces. Considerando a, b e c como as dimensões do paralelepípedo, a área de cada face retangular pode ser obtida multiplicando as dimensões duas a duas, resultando em três áreas distintas: ab, ac e bc. Como cada par de faces congruentes contribui com área total da superfície, a fórmula para a área total (A_t) do paralelepípedo é dada por: $A_t = 2\text{ab} + 2\text{ac} + 2\text{bc}$. Essa expressão reflete a soma das áreas de todas as faces do paralelepípedo, levando em conta as congruências das faces opostas.

O volume do paralelepípedo pode ser calculado a partir das medidas de suas três dimensões: comprimento, largura e altura. A fórmula para o volume (V) é obtida multiplicando suas três dimensões, ou seja, o comprimento (a), a largura (b) e a altura (c) ilustrados na (Figura 3 (A)) obtendo $V = a \cdot b \cdot c$. Essa fórmula reflete a quantidade de espaço tridimensional ocupada pelo sólido.

2.3.2.3 Cilindro Reto

O cilindro é um sólido geométrico que possui duas bases circulares congruentes e uma superfície lateral curva, conforme ilustra a Figura 5(a) e a planificação presente na Figura 5(b). Nestes termos, no cálculo da área da superfície total de um cilindro deve-se considerar duas partes: as áreas das bases circulares e a área da superfície lateral. Consequentemente, dois parâmetros devem ser considerados para estes cálculos: o raio (r) da base e a altura (h) (ver Figura 5(b)).

Figura 5: Representação gráfica de um cilindro e sua planificação.

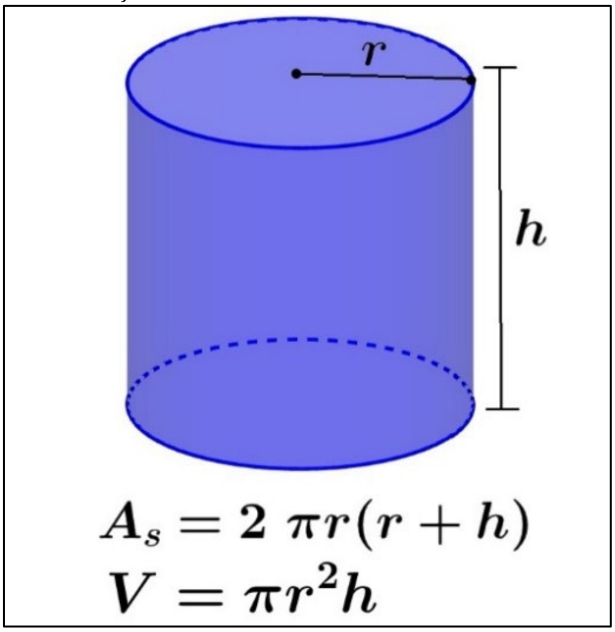


Fonte: adaptado de Mundo Educação (2024)

A área de cada base (A_b) é dada pela fórmula $A_b = \pi r^2$. Por sua vez, a área da superfície lateral (A_l) é dada por $A_l = 2\pi rh$, que corresponde ao retângulo que envolve o cilindro quando desdobrado. Assim, a área total da superfície do cilindro (A_s) é dada por: $A_s = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Colocando os termos comuns em evidência, tem-se: $A_s = 2\pi r.(r + h)$ (ver Figura 6).

O volume (V) do cilindro é calculado multiplicando-se a área da base ($A_b = \pi r^2$) pela altura h, obtendo-se como fórmula $V = \pi r^2 h$, como ilustra a Figura 6.

Figura 6: Ilustração relativa à área e ao volume de um cilindro.



Fonte: Neurochispas (2024).

2.3.2.4 Pirâmide Quadrangular

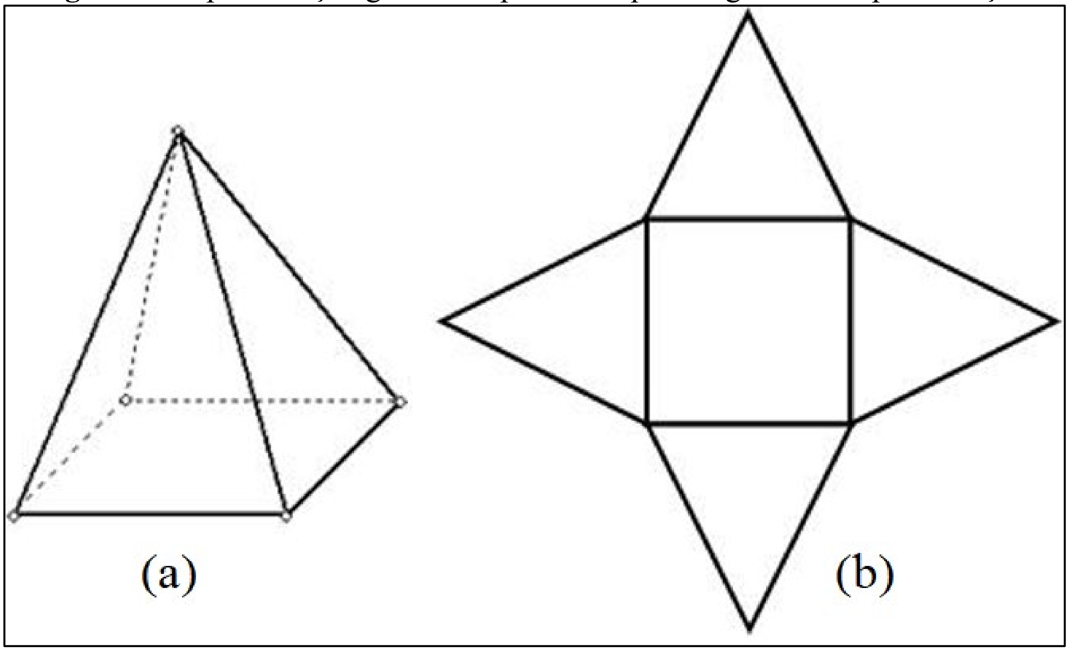
A pirâmide é um sólido geométrico caracterizado por uma base poligonal e faces laterais triangulares que se encontram em um ponto comum, chamado vértice. A pirâmide aqui abordada será a quadrangular (base quadrada), ilustrada pela Figura 7(a). Sua planificação é mostrada na Figura 7(b).

Para a determinação da sua área de superfície total e seu volume, utilizam-se as dimensões do lado da base (l) e da altura da pirâmide (h), além do apótema lateral (x). Tais elementos são conforme o mostrado na Figura 8.

A área de superfície total (A_s) da pirâmide quadrangular é a soma da área da base (A_b) com a área das faces laterais (A_l). Como trata-se de um base quadrada de lado l, tem-se que $A_b = l^2$. As faces laterais são quatro triângulos congruentes cuja a base é l e cuja altura inclinada (apótema lateral) é x. Assim, a área total da superfície lateral (A_l) $A_l = 4 \cdot \frac{l \cdot x}{2}$ que, simplificadamente, fica $A_l = 2lx$. Logo, a área total da superfície é $A_s = l^2 + 2lx$.

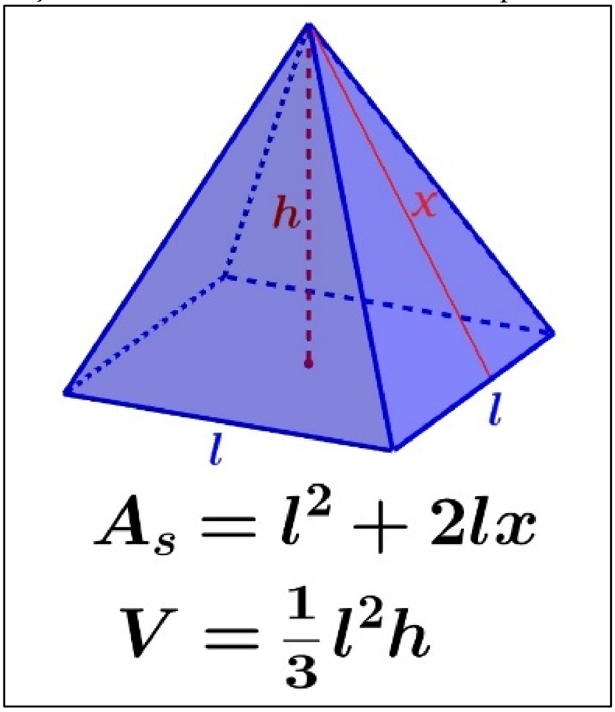
O volume (V) da pirâmide quadrangular é calculado como um terço do produto da área da base (A_b) pela altura (h), que é a distância perpendicular entre o centro da base e o vértice, obtendo assim $V = \frac{1}{3} l^2 h$, conforme ilustra a Figura 8.

Figura 7: Representação gráfica da pirâmide quadrangular e sua planificação.



Fonte: Pinterest (2024)

Figura 8: Ilustração relativa à área e volume de uma pirâmide quadrangular.

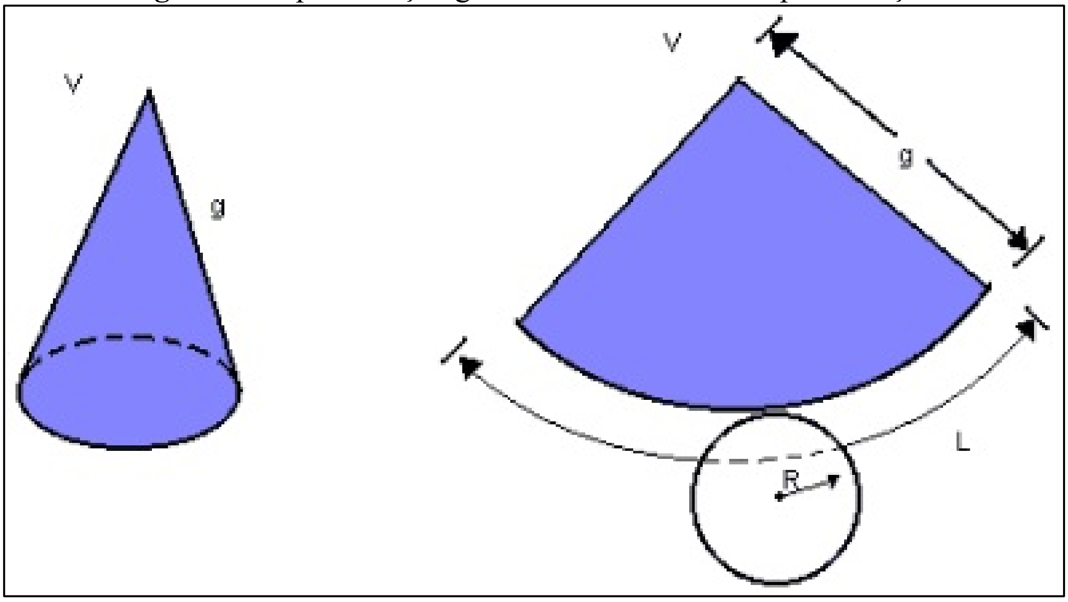


Fonte: Neurochispas (2024).

2.3.2.5. Cone

O cone é um sólido geométrico caracterizado por uma base circular e uma superfície lateral curva que converge para um ponto chamado vértice (ver Figura 9). Para determinar sua área de superfície total e seu volume, utilizam-se as dimensões principais, que são: o raio da base (r), a altura (h) e a geratriz (g). Tais elementos são apresentados na Figura 9.

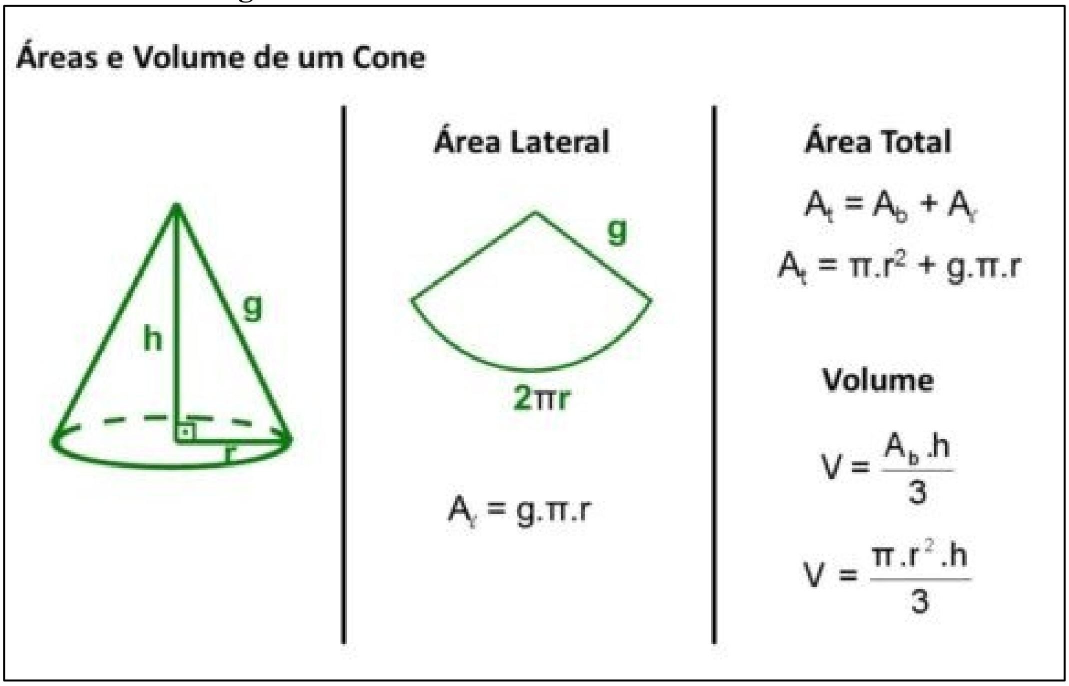
Figura 9: Representação gráfica de um cone e sua planificação.



Fonte: adaptado de Só Matemática (2024).

A área de superfície total (A_t) do cone é a soma da área da base circular (A_b) com a área da superfície lateral curva (A_l). A área da base é dada por $A_b = \pi r^2$, enquanto a área da superfície lateral curva é $A_l = \pi r g$, onde r é o raio da base e g é a geratriz do cone. Assim, a área total pode ser expressa como: $A_t = \pi r^2 + \pi r g$. Fatorando o termo comum, a fórmula simplificada é: $A_t = \pi r.(r + g)$. O volume (V) do cone é calculado como um terço do produto da área da base pela altura (h), ou seja, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. A Figura 10 sumariza estas definições.

Figura 10: Fórmulas de área e de volume do cone.



Fonte: adaptado de Matemática do João Vitor (2024).

2.4. Realidade Aumentada na Educação

Nesta seção, se aborda a Realidade Aumentada (RA), uma tecnologia inovadora que tem o potencial de enriquecer a experiência de aprendizagem ao integrar objetos virtuais ao ambiente real imageado. Sua definição e aplicações na educação são discutidas a seguir, destacando o fato de como a RA pode, se usada adequadamente, transformar o ensino de Matemática. Em particular, se explora o aplicativo Sólidos RA, que utiliza essa tecnologia para facilitar a visualização e manipulação de sólidos geométricos, proporcionando uma abordagem interativa e envolvente no processo ensino-aprendizagem.

2.4.1. Definição de Realidade Aumentada - RA

Com o grande avanço da tecnologia, esta encontra-se cada vez mais enraizada no cotidiano das pessoas, tanto no campo profissional, quanto na área do entretenimento. Inovações surgem continuamente e ganham seu espaço junto ao público, gerando uma nova abordagem para questões aparentemente consolidadas. Uma das tecnologias mais recentes, que vem ganhando relevância e transformando diversas áreas da atividade humana, é a realidade aumentada. Tori e Hounsell (2018) explicam que:

> A evolução das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs), incluindo o poder de processamento dos computadores, o barateamento dos dispositivos, a velocidade da comunicação e a disponibilidade de aplicativos gratuitos – tudo isto ocorrendo tanto nos computadores quanto nos dispositivos móveis – vem promovendo a consolidação de várias tecnologias, dentre elas a RA (Tori e Hounsell, 2018, p. 36).

Essa tecnologia vem sendo desenvolvida e explorada há bastante tempo. Porém, sua consolidação é relativamente recente, como explicam Tori e Hounsell (2018, p. 48):

> A RA que consideramos aqui é atribuída a Ivan Sutherland junto com Bob Sproull, a criação em 1968 em Harvard do primeiro protótipo de dispositivo que permitia juntar imagens 3D geradas em computador sobre imagens reais. O sistema já combinava o monitor (*display*), monitoramento e geração de imagens por computador que caracterizam uma aplicação de RA até hoje. (Tori e Hounsell, 2018, p. 48).

Sua primeira aplicação ocorreu alguns anos depois de sua criação, conforme o mencionado por Kirner e Siscoutto (2007). Apenas na década de 1980, no meio militar, foi que o primeiro projeto de RA surgiu. Ele consistia em um simulador de *cockpit* de avião que, via RA, misturava elementos virtuais com o ambiente físico do usuário (Kirner; Siscoutto, 2007, *apud* Martins e Rossetto, 2022, p. 3).

Quando se fala de realidade aumentada, é importante não a confundi-la com a Realidade Virtual (RV). Embora ambas compartilhem semelhanças, cada uma delas possui características distintas. Conforme explicam Tori e Hounsell (2018, p. 38), diferentemente da RV, que transporta o usuário para um outro ambiente, o virtual, fazendo-o abstrair completamente o ambiente físico e local, a RA mantém referências para o entorno real, transportando elementos virtuais para o espaço do usuário.

Portanto, pode-se considerar que as duas tecnologias operam de maneiras opostas: enquanto a RV imerge o usuário em um ambiente totalmente virtual, a RA integra elementos virtuais ao ambiente real do usuário, enriquecendo sua percepção do mundo físico.

Desde sua criação até o que se conhece hoje, a RA recebeu diversas definições de vários autores, entre elas:

A- É o enriquecimento do ambiente real com objetos virtuais, usando algum dispositivo tecnológico, funcionando em tempo real (Augment, 2017, *apud* Tori e Hounsell, 2018, p. 40).

B- É uma melhoria do mundo real com textos, imagens e objetos virtuais, gerados por computador (Insley, 2003, *apud* Tori e Hounsell, 2018, p. 40);

C- É a mistura de mundos reais e virtuais em algum ponto do espectro que conecta ambientes completamente reais a ambientes completamente virtuais (Milgram, 1994, *apud* Tori e Hounsell, 2018, p. 40);

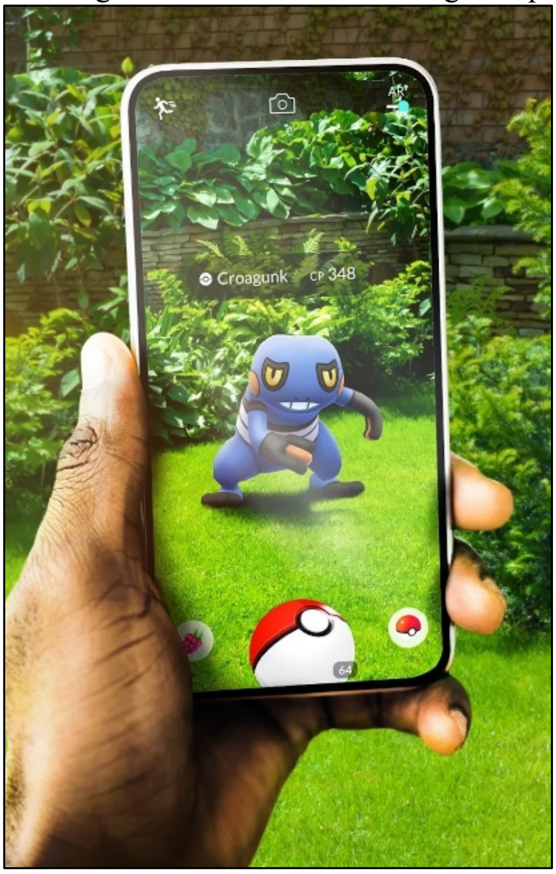
D- É um sistema que suplementa o mundo real com objetos virtuais gerados por computador, parecendo coexistir no mesmo espaço e apresentando as seguintes propriedades (Azuma *et al.*, 2001, *apud* Tori e Hounsell, 2018, p. 40):

- combina objetos reais e virtuais no ambiente real;
- executa interativamente em tempo real;
- alinha objetos reais e virtuais entre si;
- aplica-se a todos os sentidos, incluindo audição, tato e força e cheiro.

A partir da análise dessas definições, observa-se que todas elas compartilham um ponto em comum: a realidade aumentada é, essencialmente, a integração de objetos virtuais ao mundo real. Essa integração não apenas enriquece a percepção do ambiente físico, mas também cria experiências interativas que podem ser aplicadas em diversos contextos.

Esses conceitos são claramente exemplificados e materializados em um jogo para *smartphones* que ganhou grande popularidade nos últimos anos. Lançado em 2016 pela *Niantic, Inc.*, em colaboração com a *Nintendo* e *The Pokémon Company, o Pokémon GO™* utiliza essa mecânica que integra seres virtuais ao mundo real através da câmera do *smartphone*. O jogo permite que os jogadores vejam e interajam com criaturas virtuais sobrepostas aos cenários reais captados pela câmera do dispositivo, conforme o ilustrado na Figura 11.

Figura 11: Pokémon integrado ao ambiente real imageado por um *smartphone*.



Fonte: *Pokémon GO* (2024).

Existem dois tipos principais de RA: as que utilizam marcadores e as que não os utilizam. Cabe esclarecer que, marcadores são ícones gatilho que, quando imageados, indicam ao *software* de realidade aumentada em que posição da cena um objeto virtual deverá ser inserido. Um exemplo popular de RA sem marcadores é o jogo *Pokémon GO*™, mencionado e ilustrado anteriormente. Nesse tipo de RA, o posicionamento dos objetos virtuais — como as criaturas do jogo — não depende de marcadores físicos, mas sim da localização (latitude e longitude) fornecida pelo Sistema de Posicionamento Global (em inglês: *Global Positioning System* – GPS) ao jogo. Ou seja, através dessa tecnologia, o jogo integra os elementos virtuais diretamente ao ambiente real com base na geolocalização fornecida pelo GPS, permitindo uma interação dinâmica entre o mundo real e o digital, sem a necessidade de códigos, ícones ou marcadores visuais específicos.

Já os marcadores, normalmente representados por códigos bidimensionais, como códigos QR, são utilizados para orientar a exibição de objetos virtuais no ambiente real. Como explicam Tori e Hounsell, (2018), o *software* busca identificar esta imagem (marcador) e, a partir dessa identificação, calcula a posição e orientação compatível com a projeção perspectiva estimada para a sobreposição do objeto virtual.

2.4.2. Benefícios da Realidade Aumentada no Ensino de Matemática

Entre as diversas aplicações dessa tecnologia (RA), verifica-se a sua utilização no campo da educação. Tal fato se dá por esta tecnologia ser de utilização simples e aceso fácil, sendo necessário apenas um dispositivo móvel, como um *smartphone*. Assim, a RA consiste em uma boa opção para a inserção na educação. Almeida e Santos (2015), acrescentam que:

> [...] Uma das tecnologias que podem auxiliar o docente é a Realidade Aumentada, pois é uma tecnologia que traz inovação e interação entre o mundo real e virtual, ou seja, entre o professor/alunos e objetos 3D criados em computador. Essa tecnologia pode trazer mais dinâmica ao ensino de Matemática e tornar a aprendizagem mais atrativa aos alunos. (Almeida e Santos, 2015, *apud* Neinas, 2020, p. 7).

Dessa forma, essa tecnologia tem o potencial de capturar a atenção dos estudantes, despertando sua curiosidade e promovendo maior engajamento e participação nas aulas, que são desafios comumente enfrentados pelos profissionais da educação. Dada a importância desse engajamento, é fundamental reconhecer que:

> [...] a motivação dos estudantes é um tópico que tem sido bastante discutido no âmbito educacional, que é capaz de influenciar direta e indiretamente no progresso estudantil. Pois, um aluno motivado manifesta-se ativamente no processo de aprendizagem, pleiteando em tarefas desafiadoras, usando novas estratégias e mostrando satisfação na obtenção dos resultados. Assim, é cada vez mais importante que professores tenham condições de construir um ecossistema motivador e cativante durante o processo de aprendizagem (Moraes; Varela, 2007, *apud* Neinas, 2020, p. 2).

Infere-se então que essa ferramenta possa proporcionar uma visualização mais explicita, evidente e palpável de objetos, facilitando a compreensão de conceitos abstratos, que muitas vezes não são assimilados pelos alunos por meio do trabalho empreendido via métodos tradicionais de ensino. Wanderley (2011) explica que:

> Ao estabelecer uma ligação entre o mundo virtual e o mundo real, a RA proporciona ao aluno a sensação de domínio da aplicação computacional, garantindo uma interação mais natural entre aluno e máquina. Sendo assim, a educação tem muito a ganhar com a inserção desta tecnologia, tendo em vista que a mesma proporciona grande interatividade entre professores e alunos, e destes com o meio tecnológico. (Wanderley, 2011, *apud* Neinas, 2020, p. 8)

Vale destacar que, o uso de tecnologias na educação é amplamente incentivado e faz parte das dez competências gerais estabelecidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Este documento, elaborado pelo Ministério da Educação (MEC), define as aprendizagens essenciais, competências e habilidades necessárias para a Educação Básica no Brasil, com o intuito de promover o desenvolvimento integral dos alunos. A quinta competência, por exemplo, estabelece a importância de:

> Utilizar tecnologias digitais de comunicação e informação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas do cotidiano (incluindo as escolares) ao se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos e resolver problemas (Brasil, 2018, p. 18).

Além disso:

> A BNCC orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de Geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização (Brasil, 2018, p. 276).

Com esse pressuposto em mente, supõe-se que uso dessa tecnologia no âmbito escolar só venha a favorecer o ensino de Matemática. A realidade aumentada pode, não apenas favorecer o entendimento de conceitos abstratos, como também proporcionar experiências de aprendizagem mais interativas e imersivas, que promovam o desenvolvimento do pensamento crítico e criativo. Ao permitir com que os alunos interajam com objetos virtuais em um ambiente real, essa ferramenta pode propiciar a compreensão dos conceitos matemáticos de forma concreta, tornando-os mais acessíveis e relevantes para o cotidiano dos estudantes. Assim, a RA pode ser uma poderosa aliada na construção de um ecossistema educacional mais dinâmico, motivador e alinhado com as diretrizes contemporâneas da BNCC, que enfatizam o uso ético e reflexivo das tecnologias digitais na resolução de problemas e na produção de conhecimento.

2.4.3. Aplicativo Sólidos RA

O aplicativo Sólidos RA, voltado para o ensino de Matemática, utiliza a tecnologia de realidade aumentada e está disponível gratuitamente para *download* na *Google Play Store*. Desenvolvido em 2020 por Lucas Luppi Amorim, durante seu curso de licenciatura em Matemática no Instituto Federal do Espírito Santo (IFES), o projeto surgiu como parte de um trabalho de construção de material didático. A formação de Amorim em Computação foi um diferencial que facilitou o processo de desenvolvimento do aplicativo, que se tornou uma ferramenta inovadora e acessível para o ensino de sólidos geométricos.

O aplicativo conta atualmente com cinco módulos, acessíveis diretamente a partir de sua interface inicial. Os módulos disponíveis são relativos à visualização, planificação, criação, modelagem e geoplano. A interface inicial do aplicativo, ilustrada na Figura 12, mostra os módulos citados.

O aplicativo Sólidos RA utiliza marcadores específicos (códigos QR) para implementar os modelos tridimensionais. Quando imageados, esses marcadores servem para informar ao aplicativo qual modelo geométrico deve ser exibido e qual o seu posicionamento no espaço. Ao escanear os códigos QR, o *app* consegue identificar o objeto correspondente e apresentar a sua versão digital sobreposta ao ambiente real imageado, permitindo uma interação dinâmica e precisa entre o mundo virtual e o físico. Na Figura 13 estão exemplificados alguns desses marcadores.

Figura 12: Interface do aplicativo Sólidos RA.

Fonte: captura de tela do aplicativo Sólidos RA (2024)

Figura 13: QR Codes gerados gerados pelo Sólidos RA

Fonte: captura do material disponível no aplicativo Sólidos RA (2024)

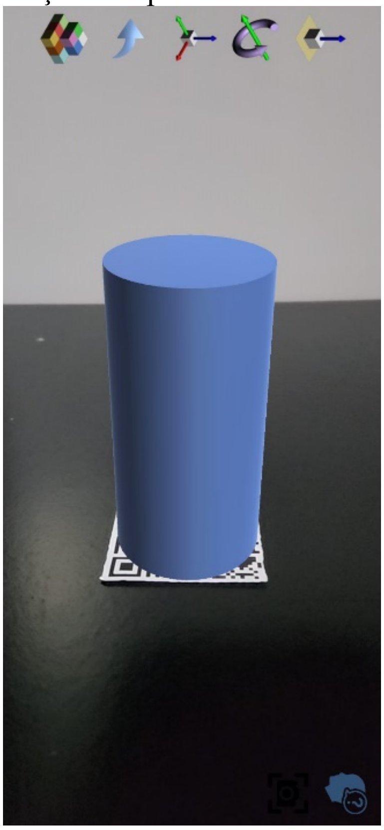
O aplicativo oferece uma ampla variedade de sólidos geométricos, disponíveis para visualização, conforme o mostrado na Figura 14. Cada sólido numerado, apresentado na Figura 14, está associado a um marcador específico (código QR) que o identifica para o *app*.

Figura 14: Sólidos disponíveis no *software* Sólidos RA.

01. Cubo
02. Esfera
03. Cilindro reto
04. Cone reto
05. Tronco de cone reto
06. Pirâmide regular quadrangular
07. Pirâmide regular pentagonal
08. Pirâmide regular hexagonal
09. Pirâmide regular heptagonal
10. Pirâmide regular octogonal
11. Tronco de pirâmide regular quadrangular
12. Tronco de pirâmide regular pentagonal
13. Tronco de pirâmide regular hexagonal
14. Tronco de pirâmide regular octogonal
15. Tronco de pirâmide regular octogonal
16. Prisma reto regular quadrangular
17. Prisma reto regular pentagonal
18. Prisma reto regular hexagonal
19. Prisma reto regular heptagonal
20. Prisma reto regular octogonal
21. Prisma reto quadrangular
22. Prisma oblíquo regular triangular
23. Prisma oblíquo regular quadrangular
24. Prisma oblíquo regular pentagonal
25. Prisma reto pentagrâmico
26. Pirâmide oblíqua quadrangular
27. Pirâmide oblíqua pentagonal
28. Pirâmide oblíqua hexagonal
29. Cilindro oblíquo
30. Cone oblíquo
31. Tetraedro
32. Octaedro
33. Icosaedro
34. Dodecaedro
35. Icosidodecaedro
36. Icosaedro truncado
37. Rombicuboctaedro
38. Pseudorombicuboctaedro
39. Tubo
40. Elipsóide
41. Toróide
42. Semiesfera

Fonte: captura do material disponível no aplicativo Sólidos RA (2024)

Figura 15: Módulo de visualização do aplicativo Sólidos RA apresentando um cilindro.

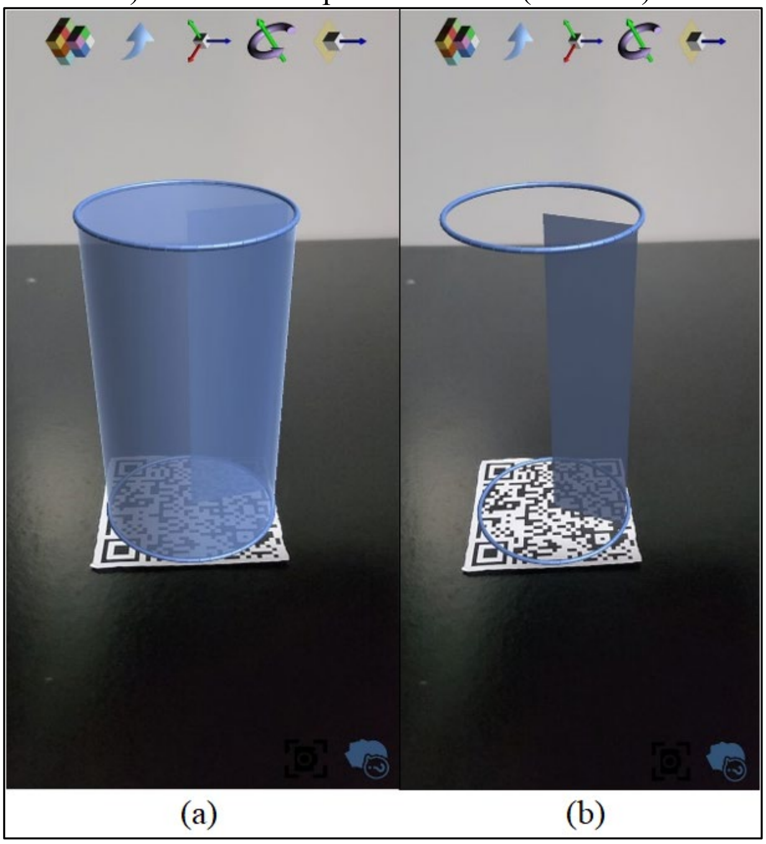


Fonte: captura de tela do aplicativo Sólidos RA (2024)

No módulo de visualização do aplicativo, ao se direcionar a câmera do *smartphone* para algum marcador, o respectivo sólido geométrico será exibido na tela, em meio à cena imageada. A Figura 15 ilustra esse fato. Na referida figura, após o escaneamento de um código QR, um cilindro foi apresentado sobre o respectivo código.

A forma de visualização dos sólidos pode ser modificada utilizando-se as ferramentas disponíveis no aplicativo. Duas diferentes opções de visualização de um cilindro estão ilustradas na Figura 16. Na Figura 16(a) encontra-se o cilindro com preenchimento (azul) e na Figura 16(b) pode-se ver o cilindro sem preenchimento (aramado).

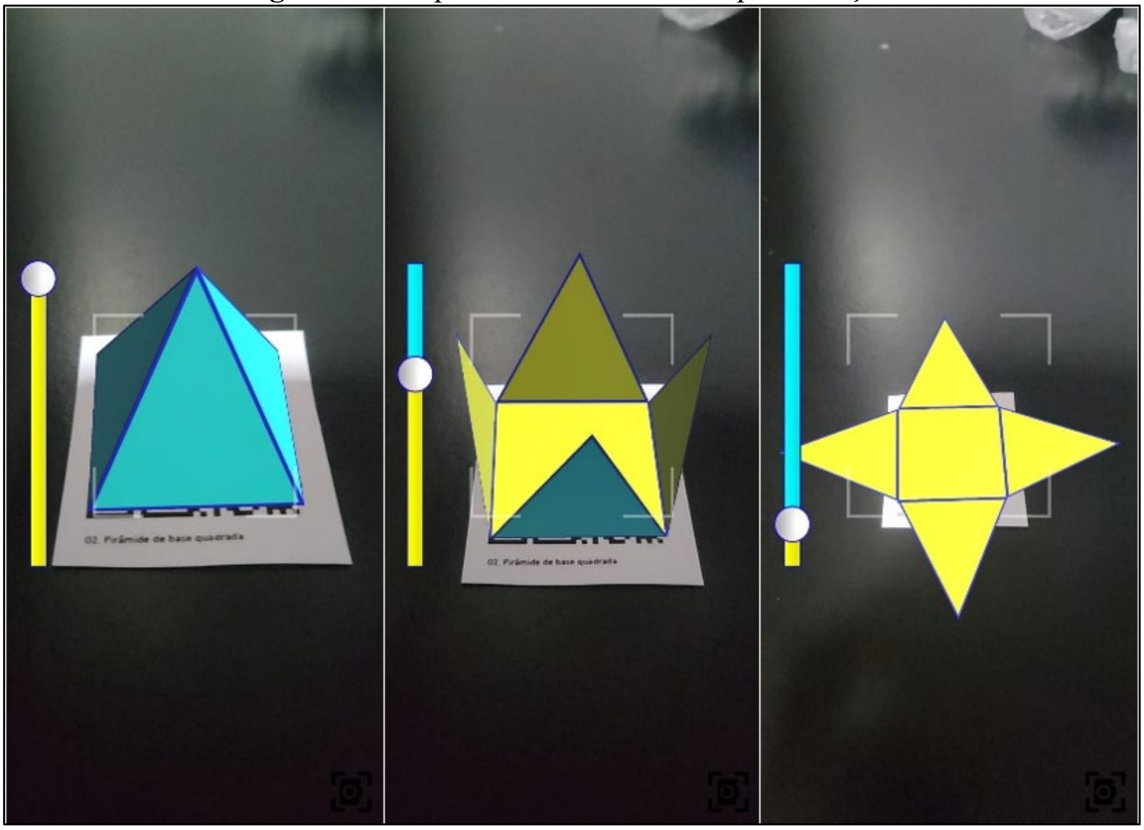
Figura 16: Opções de visualização do aplicativo Sólidos RA: a) Cilindro com preenchimento; b) Cilindro sem preenchimento (aramado)



Fonte: captura de tela do aplicativo Sólidos RA (2024)

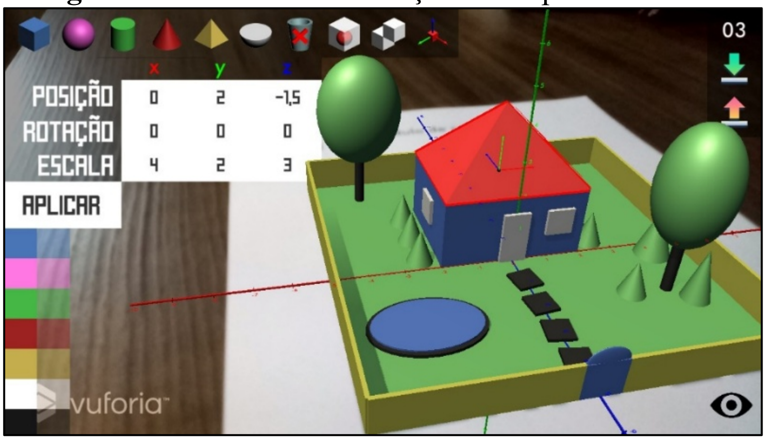
No segundo módulo (planificação), o aplicativo fornece a visualização das planificações dos sólidos gerados com base nos códigos imageados. Este módulo permite abrir e fechar completamente o modelo por meio de um botão deslizante, conforme ilustra a Figura 17. Assim, por meio da movimentação de tal botão, pode-se ir, gradativamente, da representação volumétrica de um sólido à sua planificação. A Figura 17 apresenta uma sequência de imagens, que ilustram o processo de planificação de um sólido (pirâmide), desde a sua representação volumétrica até sua planificação.

Figura 17: Etapas de abertura de uma planificação.



Fonte: captura de tela do aplicativo Sólidos RA (2024)

Figura 18: O módulo de criação: exemplo ilustrativo.

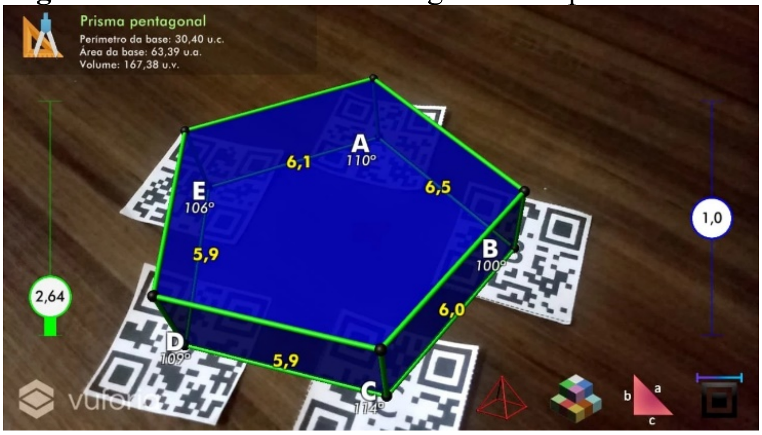


Fonte: Sólidos RA, disponível na *Google Play Store* (2024)

O terceiro módulo ou módulo de criação, como o nome sugere, permite ao usuário construir seus próprios modelos geométricos. Nesse módulo, é possível selecionar diferentes formas geométricas, combiná-las e ajustar suas dimensões, criando estruturas personalizadas. Essa funcionalidade oferece maior liberdade ao usuário, permitindo com que ele explore os sólidos de maneira criativa e interativa. Entende-se que este módulo possua o potencial incentivar o desenvolvimento do pensamento espacial e a compreensão das propriedades geométricas. A Figura 18 ilustra o módulo.

O módulo de modelagem oferece a visualização detalhada do sólido geométrico, juntamente com as suas medidas. Além de permitir a manipulação dos modelos 3D, esse módulo inclui ferramentas que exibem as dimensões exatas dos sólidos como, altura, largura e profundidade. Essas informações são essenciais para a realização de cálculos de área e de volume, tornando-o uma ferramenta pedagógica eficiente para explorar conceitos matemáticos mais complexos. Tais recursos podem contribuir para que os alunos compreendam melhor as fórmulas e aplicações práticas dessas medidas no cálculo de volumes e superfícies. A Figura 19 ilustra o referido módulo.

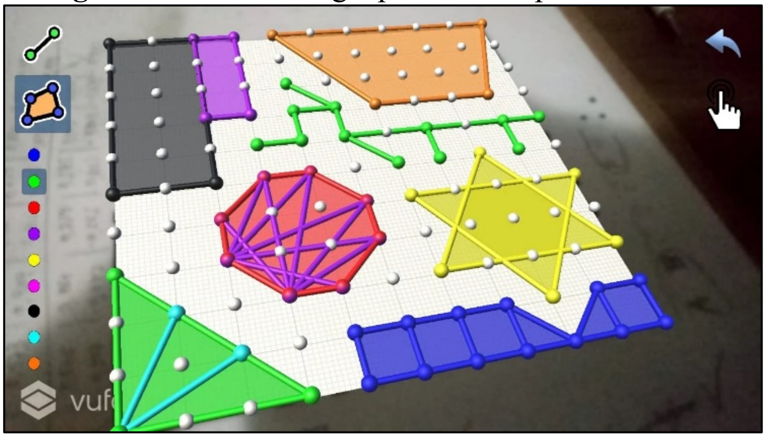
Figura 19: O módulo de modelagem: exemplo ilustrativo.



Fonte: Sólidos RA, disponível na *Google Play Store* (2024)

Por fim, o quinto e último módulo consiste em um geoplano digital, conforme o ilustrado na Figura 20. O geoplano é uma ferramenta ideal para o estudo de figuras geométricas planas. Esse recurso permite com que os usuários construam e visualizem diferentes formas geométricas em um ambiente bidimensional.

Figura 20: O módulo geoplano: exemplo ilustrativo.



Fonte: Sólidos RA, disponível na *Google Play Store* (2024)

Do anteriormente exposto, conclui-se que o aplicativo Sólidos RA consiste em uma ferramenta didática inovadora, combinando a realidade aumentada com a manipulação de sólidos geométricos de maneira acessível e interativa. Ao longo dos cinco módulos apresentados, o *app* proporciona uma experiência imersiva e prática, permitindo com que os alunos explorem não apenas a visualização tridimensional dos sólidos, mas também suas planificações, medidas e construções personalizadas.

Esses recursos podem ser utilizados de modo conjugado ou independente, como objetos de aprendizagem, auxiliando na promoção do desenvolvimento do pensamento geométrico e espacial dos estudantes. Cabe ressaltar que, estes recursos vão ao encontro das competências previstas pela BNCC, especialmente no que se refere ao uso das tecnologias digitais no processo ensino-aprendizagem. Assim, o Sólidos RA se apresenta como um importante aliado do processo ensino-aprendizagem de Geometria, permitindo aos alunos explorarem, visualizarem e compreenderem de forma lúdica e significativa as propriedades dos sólidos geométricos.

2.5 Modelos Manipuláveis no Ensino de Geometria

Nesta seção se aborda o uso de modelos manipuláveis no ensino de Geometria, com ênfase na importância da manipulação física para a aprendizagem de sólidos geométricos. Considerando que, a visualização e compreensão de objetos tridimensionais demanda habilidades espaciais nem sempre desenvolvidas pelos alunos, os materiais concretos surgem como ferramentas fundamentais para tornar o conteúdo mais acessível e significativo. Serão exploradas as bases teóricas que evidenciam como a interação com objetos físicos contribui para o desenvolvimento do raciocínio espacial, da linguagem matemática e da aprendizagem ativa e significativa no processo de construção do conhecimento geométrico.

2.5.1 Importância da Manipulação Física

Os sólidos geométricos, conforme o abordado anteriormente, são objetos tridimensionais e, por esse motivo, a simples apresentação de uma ilustração plana no quadro negro muitas vezes não é o suficiente para que os alunos consigam imaginar essas formas com clareza, compreendendo-as e abstraindo efetivamente os conceitos e características inerentes a elas. Essa limitação ocorre porque a visualização tridimensional exige uma percepção espacial desenvolvida, algo que muitos estudantes ainda não possuem ou sequer tiveram oportunidade de explorar.

Com esse olhar e buscando mitigar os problemas acima citados, destacam-se os materiais manipuláveis (ou concretos), que se tornam recursos valiosos no auxílio à construção do pensamento geométrico espacial e no desenvolvimento da visualização tridimensional dos alunos. Ressalta-se que:

> O material concreto exerce um papel importante na aprendizagem. Facilita a observação e a análise, desenvolve o raciocínio lógico, crítico e científico, é fundamental para o ensino experimental e é excelente para auxiliar ao aluno na construção de seus conhecimentos (Turrioni, 2004, p. 66).

A autora também sinaliza a importância de o aluno construir seus materiais concretos, uma vez que:

> Construindo poliedros os alunos têm a oportunidade de observar e usar relações espaciais, o que ajuda a preparar para interpretar gráficos tridimensionais da disciplina de cálculo do Curso Superior. Essas atividades com poliedros oferecem também oportunidade para os alunos aprenderem a terminologia e relações com a Matemática. (Turrioni, 2004, p. 100).

Seguindo o pressuposto da BNCC de que o aluno deva ser protagonista e agente ativo na construção do próprio conhecimento, Pestalozzi *apud* Vale, 2002 defende que:

> A intuição é uma construção. O ensino só é verdadeiro e educativo quando provém da atividade das crianças. Este método ativo dá ênfase ao papel do aluno no processo de construção do seu próprio conhecimento. Este método privilegia o trabalho com materiais concretos aproveitando toda a energia natural das crianças. (Pestalozzi *apud* Vale, 2002, p. 11).

Com isso, ao se proporcionar aos alunos, não apenas a oportunidade de manipularem os sólidos, mas também de participarem ativamente de todo o processo de construção dos modelos, colocando a "mão na massa", utilizando ferramentas como régua, compasso e esquadro, permitindo com que eles experimentem e se experimentem, errem e reconstruam, almeja-se promover uma aprendizagem mais significativa. Tais ações alicerçam-se no fato que:

> [...] As imagens mentais e as ideias abstratas dos alunos são baseadas nas suas experiências. Assim os alunos que veem e manipulam vários tipos de objetos têm imagens mentais mais claras e podem representar ideias abstratas mais completamente do que aqueles cujas experiências são mais pobres. (Vale, 2002, p. 14)

Vale (2002) em sua obra destaca os princípios de Dienes voltados ao ensino da Matemática, tais princípios destacam a importância da manipulação física para a construção do conhecimento. São eles:

> (a) O princípio dinâmico: sugere que a verdadeira compreensão de um novo conceito é um processo evolutivo envolvendo a criança em três fases. Preconiza atividades informais e estruturadas, manipulação e experimentação.
>
> (b) O princípio de variabilidade perceptual: sugere que um conceito que é aprendido é maximizado quando é apresentado à criança através de uma variedade de contextos e envolvimentos físicos. Defende a apresentação de um conceito em situações diversas.
>
> (c) O princípio da variabilidade matemática: sugere que a generalização de um conceito matemático é realçada quando as variáveis irrelevantes são sistematicamente modificadas enquanto as variáveis relevantes continuam constantes. Dá ênfase a que todas a variáveis de um conceito devem ser exemplificadas.
>
> (d) O princípio construtivista: defende que a construção deve sempre preceder a análise. Isto é, a criança deve ter oportunidades de desenvolver os seus conceitos de um modo global intuitivo começando com as suas próprias experiências.

Do acima exposto, é possível perceber o quanto a manipulação física de objetos concretos favorece a construção de conhecimentos matemáticos de forma mais intuitiva e significativa. Esses fundamentos fortalecem a convicção de que o contato direto com os sólidos geométricos, por meio da construção e experimentação, estimula a aprendizagem ativa e o desenvolvimento de habilidades essenciais, como a percepção espacial e o pensamento lógico.

Ao vivenciar diferentes formas de representar e explorar um mesmo conceito, o aluno amplia sua compreensão e se torna mais preparado para abstrair e aplicar esses conhecimentos em contextos diversos. Desse modo, ao integrar materiais manipuláveis ao ensino de Geometria, promove-se não apenas a compreensão de conteúdos, mas também a formação de sujeitos mais autônomos, reflexivos e engajados no próprio processo de aprendizagem.

2.5 Tópicos de Estatística

Nesta seção objetiva-se apresentar os principais conceitos estatísticos utilizados na análise dos dados obtidos por meio da aplicação de questionário diagnóstico inerente à pesquisa realizada. Esses conteúdos foram empregados na pesquisa com o objetivo de se avaliar e validar o material didático desenvolvido com base nos dados obtidos quando de sua aplicação em sala. Assim, além da construção do referido material, procurou-se compreender suas contribuições pedagógicas e analisá-las utilizando ferramentas estatísticas apropriadas. Os tópicos de Estatística Descritiva e Inferencial, efetivamente utilizados na pesquisa, encontram-se pormenorizados abaixo.

2.5.1 Estatística Descritiva

É usual que nas análises estatísticas de um conjunto amostral recorra-se às medidas descritivas que auxiliam na obtenção de um panorama geral dos dados, destacando sua tendência central e dispersão. Entre essas medidas descritivas estão: a média aritmética ($\bar{x}$), a mediana (M_d), a moda (M_o), a variância amostral (s^2), o desvio-padrão amostral (s) e o coeficiente de variação (CV). A média, a mediana e a moda são medidas de tendência central, enquanto as demais métricas indicam a dispersão dos dados em torno dessa média.

Segundo Fonseca e Martins (1996) considerando um conjunto de dados formado por n elementos, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, têm-se as seguintes expressões para as estatísticas citadas acima:

- Média aritmética ($\bar{x}$): medida de tendência central que fornece um valor geral que equilibra a variabilidade de cada amostra analisada, fornecendo uma noção do comportamento de cada variável.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{1}$$

- Mediana (M_d): valor que separa a primeira metade das amostras dos últimos 50%, considerando que estes valores amostrados estão em ordem crescente.

$$M_d = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}, \quad \text{para número de observações } n \text{ impar.}$$

e (2)

$$M_d = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, \qquad \text{para número de observações } n \text{ impar.}$$

- Moda (M_o): valor amostral mais frequente no conjunto de amostras.

$$M_0 = x_{moda} \tag{3}$$

- Variância amostral (s^2): estatística que quantifica a dispersão dos dados amostrais em relação à sua média.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \tag{4}$$

- Desvio padrão amostral (s): medida de dispersão dos dados amostrais ao redor da média e que é expressa na mesma unidade de medida dos dados originais.

$$s = \sqrt{s^2} \tag{5}$$

- Coeficiente de variação (CV): medida estatística que expressa a variabilidade de um conjunto de dados em relação à sua média, sendo calculado como a razão entre o desvio-padrão e a média, sendo expresso em percentagem.

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100 \tag{6}$$

2.5.2 Estatística Inferencial

Cabe informar inicialmente que, de modo geral, os recursos relativos à Estatística Descritiva permitem a generalização de conclusões, ao possibilitar que parâmetros populacionais sejam estimados a partir de amostras. Neste contexto, técnicas como os “testes de hipóteses” são utilizadas a fim de delinear tendências e comportamentos. Dessa forma, a fim de se proceder uma análise mais profunda dos dados obtidos da pesquisa executada, os seguintes tópicos de Estatística Descritiva foram utilizados e estão aqui descritos.

2.5.2.1 Testes de Hipóteses e Erro Tipo I

Os testes de hipóteses são procedimentos estatísticos utilizados para as tomadas de decisões a partir de dados amostrais. Eles podem ser aplicados em situações nas quais as amostras apresentem comportamento semelhante, mas não idêntico, ao das populações que representam. Após a coleta e análise dos dados, o teste estatístico indica se há evidências suficientes para rejeitar H_0, o que significa que há discrepância entre as variáveis analisadas. Um aspecto importante desse processo é o erro tipo I, que ocorre quando se rejeita a hipótese nula mesmo sendo verdadeira. Para isso, são formuladas duas hipóteses:

- Hipótese nula (H_0): não há diferença ou efeito significativo entre as variáveis investigadas;
- Hipótese alternativa (H_1): há diferença ou efeito significativo entre as variáveis investigadas.

Com a aplicação do teste, podem ocorrer dois tipos de decisões mutuamente exclusivas: aceitar ou rejeitar H_0. Esses testes baseiam-se nos seguintes parâmetros:

- **α:** este parâmetro (*alfa*) expressa a probabilidade de ocorrência de um erro tipo I (rejeitar H_0 quando ela é verdadeira). A este parâmetro α dá-se o nome de nível de significância de um teste e para ele comumente são utilizados os percentuais prefixados *a priori* de 1%, 5% e 10%;

- **$1 - \alpha$:** este parâmetro denomina-se nível de confiança de um teste (probabilidade de acerto do teste). Ele reflete o quanto se pode acertar em um teste e para ele comumente são utilizados os percentuais 99%, 95% e 90%;

Após a execução do teste, calcula-se:

- **$p - valor$:** parâmetro relativo à probabilidade do erro real de um teste estatístico. Se o $p - valor$ for pequeno, então rejeita-se H_0;

- **$1 - (p - valor)$:** parâmetro concernente à probabilidade de acerto com base na estatística observada.

Cabe informar que, a forma de se encontrar o $p - valor$ varia de acordo com o teste utilizado. O Quadro 6 sumariza a decisão de um teste de hipótese:

Quadro 6: Decisão do teste de hipótese com base no erro do tipo I (α).

Realidade	**Conclusão do Teste**	
Real	**Rejeitar H_0:**	**Aceitar H_0:**
Imposta (Verdadeira H_0)	Erro tipo I: α	Correto: $1 - \alpha$
Teste Escolhido	$p - valor$	$1 - (p - valor)$

Fonte: Adaptado de Fonseca e Martins (1996).

Na maioria dos testes estatísticos, podem ocorrer as seguintes situações inferenciais de cunho comparativo, que se baseiam nos valores $p - valor$ e α. De modo geral, tem-se:

- Se $\boldsymbol{p-valor \leq \alpha}$, então $\boldsymbol{1-(p-valor) \geq 1-\alpha}$. Quando ocorrem estes dois fatos simultaneamente rejeita-se H_0;
- Se $\boldsymbol{p-valor > \alpha}$, então $\boldsymbol{1-(p-valor) < 1-\alpha}$. Quando ocorrem estes dois fatos simultaneamente aceita-se H_0.

Especifica-se, em particular, que estes tipos de análises ou critérios são utilizados diretamente nos testes de normalidade de Shapiro-Wilk e em testes não paramétricos, como o teste de Wilcoxon de postos sinalizados para localização. Especifica-se que, estes testes são descritos a seguir, dada a sua importância para a pesquisa efetuada.

2.5.2.2 Teste de Normalidade de Shapiro-Wilk

O teste de normalidade de Shapiro-Wilk é um procedimento estatístico utilizado para avaliar se os dados de uma amostra apresentam um comportamento compatível com a distribuição normal. Criado por Samuel Shapiro e Martin Wilk, em 1965, esse teste é particularmente eficiente em amostras pequenas ou moderadas. Seu funcionamento baseia-se na comparação entre os valores observados e os esperados sob a suposição de normalidade. A hipótese nula (H_0) assume que os dados seguem a distribuição normal, enquanto a hipótese alternativa (H_1) sugere que estes dados possuam uma distribuição qualquer. Quando o $p-valor$ resultante do teste é inferior ao nível de significância α pré-estabelecido (1% ou 5% ou 10%), rejeita-se H_0, indicando que a distribuição dos dados difere da normal. Por esse motivo, o teste de Shapiro-Wilk é amplamente utilizado como etapa preliminar na análise de dados, pois ele pode indicar o uso de testes estatísticos paramétricos, caso a normalidade dos dados seja verificada, ou não paramétricos, se os dados não forem normalmente distribuídos.

Com isso as possíveis hipóteses são:

- H_0: os dados apresentam distribuição normal;
- H_1: os dados não apresentam distribuição normal.

Para um conjunto de dados ordenados $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, os passos são para a aplicação do teste resumem-se a:

1. Calcula-se a soma dos quadrados dos desvios:

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n} \tag{7}$$

2. Calcula-se b:

$$b = \sum_{i=1}^{n} a_{n-i+1}(x_{n-i+1} - x_i) \tag{8}$$

sendo que a_{n-i+1}, são coeficientes tabelados de Shapiro-Wilk.

3. Obtém-se a estatística:

$$W_{calculado} = \frac{b^2}{S^2} \tag{9}$$

Considerando que, W_α é um valor tabelado estabelecido *a priori*, do acima descrito conclui-se que:

- Se $W_{calculado} < W_\alpha$, então rejeita-se a hipótese H_0 relativa à normalidade dos dados;
- Se $W_{calculado} \geq W_\alpha$, então aceita-se H_0.

2.5.2.3 Teste de Postos Sinalizados Wilcoxon para Localização

O teste de postos sinalizados de Wilcoxon para localização é uma técnica estatística não paramétrica utilizada quando se deseja avaliar se a mediana de uma população difere de um valor fixo ou se há alteração significativa entre dois conjuntos de dados pareados, como medições feitas antes e depois de um tratamento. Esse teste é indicado quando os dados não atendem aos pressupostos de normalidade, o que o torna uma alternativa robusta ao $teste\ t$ pareado. A metodologia se baseia nas diferenças entre os pares de observações, desconsiderando os valores nulos, atribuindo postos (*ranks*) às diferenças em valor absoluto e levando em conta seus respectivos sinais positivos ou negativos. A hipótese nula (H_0) afirma que a mediana das diferenças é zero, enquanto a hipótese alternativa (H_1) sugere que há uma diferença significativa. Quando o $p - valor$ obtido é menor que o nível de significância como, por exemplo 5%, rejeita-se H_0, indicando que há evidência estatística de mudança na localização central dos dados. Por essa razão, o teste de Wilcoxon é amplamente utilizado em pesquisas com amostras pequenas ou dados com distribuição assimétrica. Decorre destes fatos que, este teste não paramétrico é comumente utilizado para a comparação de médias advindas de um conjunto cujos dados não sejam normalmente distribuídos.

Dessa forma, a partir de cada uma das n amostras coletadas, independentes e ordenadas, com $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, e que perfazem um conjunto de dados que não apresenta normalidade, mas sim, alguma distribuição assimétrica, se calcula a média dos valores amostrados ($\bar{x}$), utilizando-se a equação 1.

De posse de $\bar{x}$, procede-se o teste do sinal de Wilcoxon, segundo o descrito nas pesquisas de Wilcoxon *et al.* (1970), Wilcoxon (1992) e Conover (1999). Com isso chega-se à dois possíveis pares de hipóteses:

- H_0: a média populacional é igual à média amostral ($\mu = \bar{x}$);
- H_1: a média é maior que $\bar{x}$ ($\mu > \bar{x}$).

Ou, alternativamente:

- H_0: a média populacional é igual à média amostral ($\mu = \bar{x}$);
- H_1: a média é menor que $\bar{x}$ ($\mu < \bar{x}$)).

No primeiro par de hipóteses, ao se rejeitar H_0, então tem-se o indicativo de que a média populacional possa ser maior do que a média amostral calculada. De modo análogo, no segundo par de hipóteses, ao se rejeitar H_0, tem-se o indicativo de que a média populacional possa ser menor do que a média amostral calculada.

A partir da determinação das hipóteses e de posse de $\bar{x}$, a execução do teste segue as seguintes etapas:

1. Subtraia a média $\bar{x}$ de cada observação para se obter os valores d_i, com $d_i = x_i - \bar{x}$. Se algum $x_i = \bar{x}$, então $d_i = 0$. Este d_i deve ser eliminado dos cálculos e a cardinalidade amostral passa de n para $n - 1$. Feito isso, siga com o processo, eliminando os casos em que $d_i = 0$ e ajustando o tamanho da amostra (n);
2. Efetue o ranqueamento ordenando os valores absolutos $| d_i |$, obtidos na etapa anterior, e atribua postos (usando média em caso de empates);
3. Atribuir sinais aos postos conforme o sinal de d_i;
4. Calcular T^+ (soma dos postos positivos) e T^- (soma dos negativos). A estatística do teste será T, que corresponderá ao menor valor entre T^- e T^+.

Assim, para a tomada de decisão o valor T, menor valor entre T^+ e T^-, é comparado com valores críticos ($T_{crítico}$) tabelados para definir se H_0 deve ser aceita ou rejeitada.

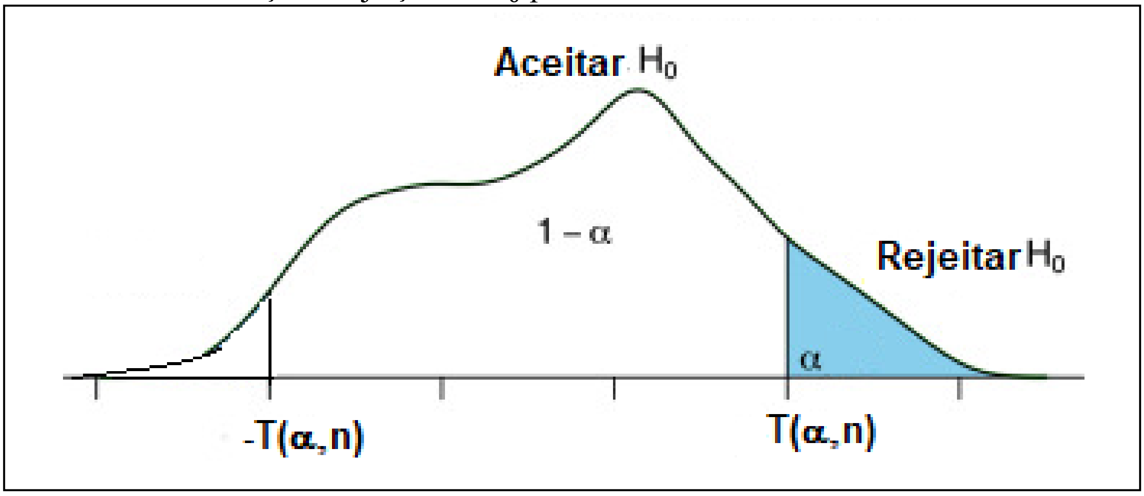
Por exemplo, supondo que se tenha um conjunto de dados com distribuição distinta da normal e se queira, em um teste unicaudal à direita, pôr a prova as hipóteses:

$$H_0: \mu = \bar{x}$$

$$H_1: \mu > \bar{x}$$

Neste caso, rejeita-se $H_0: \mu = \bar{x}$ ou, igualmente, aceita-se $H_1: \mu > \bar{x}$, a um certo nível de significância α, se $T_+ > T_{(\alpha,n)}$, onde $T_{(\alpha,n)}$ é o parâmetro $T_{crítico}$ tabelado. A Figura 21 ilustra as hipóteses de um teste unilateral à direita, com $H_0: \mu = \bar{x}$ e $H_1: \mu > \bar{x}$. Na referida figura, pode-se ver as regiões de aceitação e rejeição de H_0.

Figura 21: Gráfico ilustrativo de dados com distribuição livre e com as regiões críticas de aceitação e rejeição de H_0 para um teste unicaudal à direita.



Fonte: Rodrigues (2024)

3 METODOLOGIA

Nesta seção estão descritos os passos que compuseram o delineamento metodológico da pesquisa realizada. Assim, os seis passos que se seguem destinam-se à descrição, em ordem de execução, das ações que foram empreendidas quando da execução da pesquisa. Cabe especificar que, a sequência didática, cuja construção está mais bem detalhada no Capítulo 4, foi aplicada em sala de aula para fins de experimentação e validação. Nestes termos, os passos relativos à elaboração, experimentação e validação da sequência didática estão descritos nas subseções que se seguem.

3.1 Elaboração e Aplicação de Questionário Diagnóstico Inicial

Inicialmente, elaborado um questionário diagnóstico inicial, este foi aplicado aos alunos, com o objetivo de se mapear seus conhecimentos prévios sobre sólidos geométricos e se identificar possíveis dificuldades com os conceitos que iriam ser trabalhados. O instrumento de sondagem, que se encontra no Apêndice A, foi composto por oito questões de respostas do tipo "sim ou não", permitindo uma análise inicial ágil do nível de compreensão dos estudantes.

Além de ser um instrumento de sondagem inicial, o questionário teve a função estratégica de gerar dados *a priori* para as análises estatísticas descritivas e inferenciais previstas. Assim, os dados coletados de tal questionário serviram como referência para a comparação com os dados advindos de um segundo questionário diagnóstico (Apêndice C), aplicado ao final da experimentação. O intento da aplicação de dois questionários foi verificar e validar, de forma consistente, a eficácia da proposta didática.

3.2 Introdução ao Aplicativo de Realidade Aumentada - Sólidos RA

Após a aplicação do questionário diagnóstico, os alunos foram introduzidos ao aplicativo de realidade aumentada Sólidos RA. Nesta fase, se propôs que os estudantes explorassem o módulo de visualização e planificação do aplicativo, permitindo com que:

- **Observassem detalhadamente os sólidos:** cada sólido pode ser visualizado em três dimensões, com a possibilidade de rotação e zoom, facilitando a percepção de vértices, arestas e faces.
- **Identificassem os elementos geométricos das superfícies:** os alunos podem compreender como cada sólido é composto por formas geométricas específicas, como quadrados, retângulos, triângulos e círculos.
- **Explorassem a planificação dinâmica:** o aplicativo permite com que os alunos visualizem a planificação de cada sólido e seu processo de montagem, fortalecendo a percepção

- espacial e a habilidade de transpor as representações bidimensionais para as tridimensionais.

Além disso, nesta etapa se proporcionou a interação ativa e a exploração autônoma, incentivando a construção de conhecimento de forma significativa, preparando os alunos para a aplicação prática de conceitos de área e volume.

Após a exploração do aplicativo, se solicitou aos alunos o preenchimento de um relatório de observação (Apêndice B), no qual deveriam ser registradas as características dos sólidos observados e eventuais dificuldades encontradas. Posteriormente, o relatório serviu como ponto de partida para debates em sala de aula, nos quais os alunos compartilharam as percepções, compararam experiências e discutiram estratégias de solução de problemas. Os objetivos desta etapa incluíram:

- Fortalecer a capacidade de análise e reflexão;
- Estimular a troca de conhecimentos e a construção coletiva da aprendizagem;
- Promover o pensamento crítico, ao confrontar observações individuais com as de colegas.

3.3 Atividade de Construção dos Sólidos

Propôs-se que, nesta etapa, os alunos realizassem a construção prática dos sólidos geométricos. Para essa tarefa, cada estudante utilizou materiais simples, como régua, tesoura, cola e papel, para recortar as planificações previamente fornecidas e montar os sólidos, chegando-se às formas tridimensionais.

O principal objetivo desta atividade foi estimular a compreensão espacial, permitindo com que os alunos transformassem representações bidimensionais em objetos tridimensionais concretos. Ao manipular os sólidos, eles puderam relacionar os elementos geométricos que compõem cada figura (vértices, arestas e faces) com a forma final, fortalecendo a percepção espacial e a capacidade de visualização geométrica.

Além disso, a construção manual dos sólidos serviu para:

- **Conectar teoria e prática:** os alunos puderam aplicar seus conhecimentos prévios sobre formas geométricas e relações espaciais na criação de modelos físicos.
- **Estimular a autonomia e a criatividade:** cada estudante organizou, montou e ajustou os sólidos, desenvolvendo habilidades de planejamento e resolução de problemas.
- **Permitir avaliação formativa:** a observação da execução dos modelos ofereceu ao professor informações sobre o nível de compreensão inicial dos alunos, possibilitando identificar dificuldades e ajustar estratégias pedagógicas.

Essa atividade também permitiu com que os alunos transpusessem a experiência virtual para o mundo físico, consolidando o conhecimento adquirido durante a exploração do aplicativo Sólidos RA. Ao manipular os sólidos concretamente, os estudantes reforçaram a percepção espacial e a compreensão das relações entre as formas geométricas, tornando a aprendizagem mais significativa e duradoura.

3.4 Introdução ao Cálculo de Volume e Área de Superfície

Com a compreensão das formas geométricas dos sólidos aprimorada, foi introduzido aos alunos o cálculo de volume e área de superfície de cada sólido abordado. Nessa etapa, os conceitos foram apresentados com uma abordagem prática, com exemplos simples que ilustrassem as fórmulas para cada tipo de sólido. Assim, se executou:

- **Explicação das Fórmulas**: cada fórmula foi apresentada juntamente com uma explicação sobre sua aplicação e significado, buscando se conectar a teoria ao modelo visualizado e manipulado.
- **Aplicação com o aplicativo:** os alunos foram convidados a explorar o módulo de modelagem do aplicativo, que permite a visualização detalhada dos sólidos geométricos, incluindo suas dimensões exatas. Com base nessas visualizações, os alunos aplicaram as fórmulas apropriadas para calcular áreas de superfície e volumes dos sólidos exibidos no *app*. A atividade foi assim empreendida, pois acredita-se que a interação com o modelo virtual deva facilitar a compreensão das propriedades geométricas de cada sólido, proporcionando um aprendizado mais dinâmico e interativo. Durante a atividade, os alunos puderam realizar cálculos diretamente relacionados aos modelos virtuais, reforçando a aplicação prática das fórmulas no contexto tridimensional.

Essa abordagem permitiu com que o aprendizado fosse mais concreto, já que os alunos puderam ver a correspondência entre as fórmulas e os modelos tridimensionais que construíram e visualizam no aplicativo. Cabe ressaltar que, durante toda esta etapa, o professor atuou como um facilitador, auxiliador e incentivador dos alunos, propiciando a imersão aos conteúdos, auxiliando na transição do concreto para o abstrato e facilitando a abstração de conceitos.

3.5 Atividade de Cálculo Prático com Medições Reais

Buscando agregar o formalismo matemático ao conhecimento empírico, se propôs uma atividade prática na qual os alunos realizaram medições dos sólidos construídos na etapa 3.3 e utilizaram essas medidas nas fórmulas de cálculo de área de superfície e volume a eles apresentadas na etapa 3.4.

A partir das medições realizadas, os alunos puderam vincular os conceitos geométricos aprendidos à realidade concreta, promovendo uma compreensão mais profunda, efetiva e significativa dos cálculos matemáticos. Essa experiência prática permitiu com que cada estudante percebesse como a Geometria se manifesta no mundo tridimensional, tornando os conceitos mais tangíveis e aplicáveis ao cotidiano.

Além disso, a atividade ofereceu oportunidades para que os alunos identificassem e analisassem possíveis imprecisões nas medições, compreendendo suas implicações nos resultados dos cálculos. Este fato acabou por estimular o pensamento crítico, a reflexão sobre a importância da precisão e a tomada de decisões baseadas em dados reais, competências fundamentais para o desenvolvimento matemático.

Ao se trabalhar com objetos do ambiente escolar e sólidos construídos por eles próprios, os alunos puderam perceber a aplicabilidade da Geometria no espaço que frequentam, reforçando a relevância do conteúdo estudado e fortalecendo a conexão entre teoria, prática e raciocínio espacial.

3.6 Questionário Diagnóstico Final e Validação Estatística

A etapa final da pesquisa consistiu na aplicação de um questionário diagnóstico final, composto por questões objetivas e de autoavaliação, que permitiu com que os alunos expressassem sua percepção sobre a utilização do aplicativo Sólidos RA, a construção dos modelos manipuláveis e a compreensão dos conceitos de área e volume dos sólidos geométricos.

O questionário diagnóstico final teve como objetivos principais:

- **Comparar o conhecimento prévio com o aprendizado adquirido pelos alunos**, possibilitando identificar avanços conceituais e verificar o nível de consolidação da aprendizagem.
- **Avaliar a percepção dos estudantes** quanto à eficácia das atividades propostas, incluindo o uso do aplicativo, a construção dos modelos manipuláveis e a aplicação das fórmulas matemáticas.
- **Analisar a satisfação dos alunos** em relação à metodologia aplicada, às ferramentas utilizadas e à clareza das instruções fornecidas.
- **Subsidiar uma análise detalhada da eficácia da proposta didática**, considerando tanto aspectos objetivos (acerto nas respostas e cálculos) quanto subjetivos (opinião dos alunos sobre a experiência de aprendizagem).

As respostas obtidas possibilitaram a realização de análises estatísticas descritivas e inferenciais (Capítulo 5), destinadas a comparar os resultados do questionário diagnóstico inicial com os do final, verificar a evolução do conhecimento e validar, de maneira consistente, os efeitos da intervenção pedagógica.

Por fim, cabe especificar que os tópicos de Estatística Descritiva e Inferencial utilizados na análise efetuada são aqueles descritos na seção 2.5.

4 DESENVOLVIMENTO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sequência didática elaborada (Apêndice D), respaldada na BNCC (Brasil, 2018), está estruturada em quatro etapas, cuidadosamente planejadas e desenvolvidas com o objetivo de promover uma aprendizagem significativa e integrada dos conceitos relacionados aos sólidos geométricos. Cabe especificar que, os sólidos que são o foco da sequência didática são: o cubo, o paralelepípedo, o cilindro, o cone e a pirâmide. A seguir as etapas de elaboração da sequência didática são apresentadas e pormenorizadas.

Cada etapa da sequência didática foi elaborada para ser desenvolvida em uma aula com duração média de 50 minutos, podendo ser ajustada conforme a realidade, o ritmo e as necessidades de cada turma.

1 - Adoção do Aplicativo Sólidos RA

Essa etapa foi pensada com o propósito de enriquecer a experiência dos alunos no estudo dos sólidos geométricos, oferecendo uma abordagem visual, interativa e significativa por meio da tecnologia. Ou seja, se lançou mão da tecnologia, que comumente é atraente para o aluno, a fim de que, por meio desta, se pudesse lhe apresentar os entes geométricos em foco. A utilização do aplicativo Sólidos RA não foi uma escolha aleatória, mas sim uma decisão fundamentada na busca por recursos que, sendo atrativos, pudessem favorecer a aprendizagem ativa e o desenvolvimento da percepção espacial dos estudantes.

Dessa forma, o uso do aplicativo Sólidos RA teve como finalidade contribuir diretamente para o desenvolvimento de habilidades previstas na BNCC (Brasil, 2018), possibilitando com que os alunos estabelecessem conexões entre os sólidos geométricos virtuais e o mundo físico ao seu redor. A proposta buscou contemplar, por exemplo, as seguintes habilidades:

- **EF03MA13**: que trata da associação de figuras geométricas espaciais, como cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera, a objetos do cotidiano, além da correta nomeação dessas figuras.
- **EF03MA14**: que discorre sobre o permitir que os estudantes observem, descrevam e analisem as características dos sólidos.
- **EF05MA16**: que estabelece a necessidade de se favorecer a associação entre as figuras espaciais e suas representações planas, possibilitando com que os alunos comparem, nomeiem e identifiquem seus atributos com mais clareza.

Por meio da realidade aumentada, entende-se que o aprendizado possa tornar-se mais concreto, significativo, visualmente atraente e envolvente, promovendo uma maior compreensão das formas tridimensionais e de suas representações no plano. Nestes termos, buscou-se assegurar que a proposta elaborada estivesse sintonia com as diretrizes da BNCC (Brasil, 2018), que reconhecem e valorizam o uso de tecnologias digitais como parte fundamental do processo de ensino-aprendizagem. Em especial, a proposta elaborada contempla a 5ª competência geral descrita no Quadro 1 deste trabalho, a qual destaca a importância de se "utilizar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas do cotidiano (incluindo as escolares), ao se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos e resolver problemas". Assim, em acordo com a BNCC, integrar o aplicativo Sólidos RA à prática pedagógica, a proposta tem o potencial de promover não apenas a aprendizagem de conteúdos matemáticos, mas também o desenvolvimento de competências digitais essenciais para a formação integral dos estudantes.

2 - Construção dos Modelos Manipuláveis

A decisão de incluir essa etapa na sequência didática partiu da necessidade de se equilibrar o uso da tecnologia com atividades manuais que promovam o envolvimento direto dos alunos com os objetos de estudo. Dessa forma, a sequência didática busca integrar o digital e o físico, o abstrato e o concreto, favorecendo uma aprendizagem mais completa, efetiva e significativa. Ou seja, considerou-se o que é preconizado por Piaget (2007), que afirma que a criança, estando no estágio das operações concretas, adquire a capacidade de realizar operações lógicas (classificação, seriação, conservação) ao manipular objetos concretos ou representações diretas da realidade.

Assim, essa etapa foi pensada como uma forma de transpor o conhecimento visual e digital para o plano concreto, por meio da confecção manual dos sólidos geométricos. Essa etapa teve como objetivo a ampliação da compreensão dos alunos sobre as características das figuras espaciais, permitindo a manipulação física dos objetos, o que favorece o desenvolvimento da lógica formal e da percepção tátil, visual e espacial.

Essa etapa visou desenvolver as competências especificas da área de conhecimento da Matemática compreendidas pela BNCC (Brasil, 2018), conforme o especificado e imediatamente comentado abaixo:

Competência 1: "Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e atuar no mundo [...] favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico, do espírito de investigação e da capacidade de produzir argumentos convincentes."

Em suma, a manipulação física dos sólidos deve ajudar os alunos a perceberem a presença da Geometria em objetos reais e a desenvolverem raciocínio espacial e lógico ao analisarem formas, planificações e estruturas tridimensionais.

Competência 6: "Agir individual ou cooperativamente com autonomia, responsabilidade e flexibilidade [...] valorizando a diversidade de opiniões."

Entende-se que a atividade de construção feita em grupos, duplas ou individualmente, promova a cooperação, a escuta, a tomada de decisões em conjunto e o respeito aos diferentes modos de pensar e fazer.

Competência 8: "Sentir-se seguro da própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções."

A oportunidade de montar os sólidos com as próprias mãos proporciona uma sensação de conquista e domínio dos conceitos aos alunos, reforçando a autoconfiança, a autoestima e o gosto pela Matemática. E mais, diante de tais atividades, entende-se que haja uma complementação entre saberes: o saber pensar e o saber fazer. De Freire (1996), depreende-se que tais atividades práticas combinem naturalmente o conhecimento teórico (saber pensar) com a capacidade de se aplicar esse conhecimento na prática (saber fazer), propiciando o desenvolvimento dos alunos de modo holístico.

Além de contribuir para com o desenvolvimento cognitivo e motor, essa etapa estimula o interesse dos alunos pela Geometria ao torná-la mais próxima de sua realidade e acessível por meio da experimentação concreta. Ao construir e manipular os modelos, os estudantes não apenas fixam os conceitos geométricos com mais profundidade, mas também exercitam a observação, a análise e a comparação entre diferentes formas e estruturas. Trata-se, portanto, de uma etapa essencial para se consolidar a aprendizagem, reforçando a articulação entre teoria e prática, e promovendo um ambiente de aprendizagem mais dinâmico, inclusivo e centrado no aluno.

3 - Explanação sobre Cálculo de Área e Volumes

Essa etapa foi planejada com o intuito de aprofundar a compreensão dos alunos sobre as propriedades mensuráveis dos sólidos geométricos, especificamente, a área de superfícies (faces) e o volume dos sólidos. Após o contato visual e interativo com os sólidos por meio do aplicativo de realidade aumentada e da construção dos modelos manipuláveis, que constituem as etapas anteriores, torna-se essencial abordar as fórmulas matemáticas que permitem quantificar as dimensões dos elementos geométricos relacionados aos sólidos, estabelecendo a ponte entre a experiência concreta e o pensamento abstrato.

Esta etapa deve contribuir diretamente para o desenvolvimento das habilidades previstas pela BNCC (Brasil, 2018). Entre elas destacam-se:

- **EF07MA24:** que diz que o aluno deve estar apto a resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico).
- **EF08MA16:** que estabelece que o aluno deva ser capaz de resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.
- **EF08MA18:** que reza que o aluno deva conseguir resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de um cilindro reto ou a capacidade de um recipiente cujo formato é o de um cilindro reto.
- **EF09MA18:** que determina que o aluno seja capaz de resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.

Essa etapa se consolida como um momento de sistematização e aprofundamento conceitual, na qual os conhecimentos construídos nas fases anteriores ganham forma e densidade teórica por meio da exploração das fórmulas de cálculo de área e volume. Ao relacionar essas medidas com situações concretas, almejou-se promover uma aprendizagem mais significativa e contextualizada, na qual o aluno conseguisse reconhecer a utilidade prática e o papel da Matemática como ferramenta para interpretar, resolver problemas e auxiliar na tomada de decisões. Assim, inferiu-se que esta etapa não apenas preparasse os estudantes para as aplicações práticas, previstas na próxima etapa da sequência, mas também contribuísse para a formação de sujeitos autônomos, críticos e criativos no uso do conhecimento matemático.

4 - Aplicação Prática das Fórmulas aos Sólidos Geométricos (*App* e Modelos Manipuláveis)

Essa etapa da sequência didática foi planejada para promover a aplicação concreta dos conceitos de área e volume aprendidos (ou apreendidos) anteriormente, utilizando como suporte os recursos digitais do *app* Sólidos RA e os modelos físicos construídos pelos alunos. As atividades propostas nesta etapa almejaram marcar um momento de consolidação ativa do conhecimento adquirido nas etapas anteriores, pois oferecem aos estudantes a oportunidade de utilizar as fórmulas de forma funcional, empreender análises e efetuar cálculos a partir de medidas obtidas diretamente de objetos tridimensionais, sejam eles reais ou virtuais.

A proposta foi pensada para que os alunos aplicassem as fórmulas de cálculo diretamente nos sólidos, realizando medições, comparações e cálculos com base nas dimensões reais dos modelos e nas visualizações interativas oferecidas pelo aplicativo. Essa etapa visou estimular a autonomia, o pensamento crítico e a validação dos resultados por meio da análise conjunta entre o físico e o digital.

Diante do exposto, verifica-se que essa etapa está diretamente alinhada à 5ª competência específica da área de Matemática prevista pela BNCC (Brasil, 2018), que propõe: "Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados".

A construção dessa etapa foi guiada pela ideia de "aprender fazendo", visto que tal estratégia estabelece uma das formas mais eficazes de se desenvolver o raciocínio lógico e a autonomia dos estudantes. Ao serem desafiados a medir, calcular e validar seus resultados, os alunos exercitam a investigação, a argumentação e a tomada de decisão, que são competências fundamentais para o desenvolvimento integral proposto pela BNCC (Brasil, 2018). Neste processo, os alunos acabam por se tronarem os protagonistas de suas próprias histórias.

5 EXPERIMENTAÇÃO E VALIDAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA: RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo se apresenta a descrição da experimentação efetuada em ambiente escolar, preconizada no Capítulo 3, a apresentação e análise das evidências coletadas *in loco*, bem como a validação estatística da sequência didática elaborada para o ensino-aprendizagem de sólidos geométricos. Para tanto, inicialmente são descritas as atividades realizadas em sala de aula, que incluíram desde a aplicação do questionário diagnóstico inicial até as atividades de exploração digital com o aplicativo Sólidos RA e a construção de modelos manipuláveis. Além de evidenciar o envolvimento dos estudantes nas atividades propostas, este capítulo busca discutir a contribuição dos recursos utilizados para o desenvolvimento da visualização espacial, para a compreensão das propriedades dos sólidos e para a consolidação dos conceitos geométricos, estabelecendo um comparativo estatístico entre os conhecimentos prévios e os resultados alcançados após a intervenção pedagógica.

5.1 Experimentação: a Aplicação da Sequência Didática em Sala

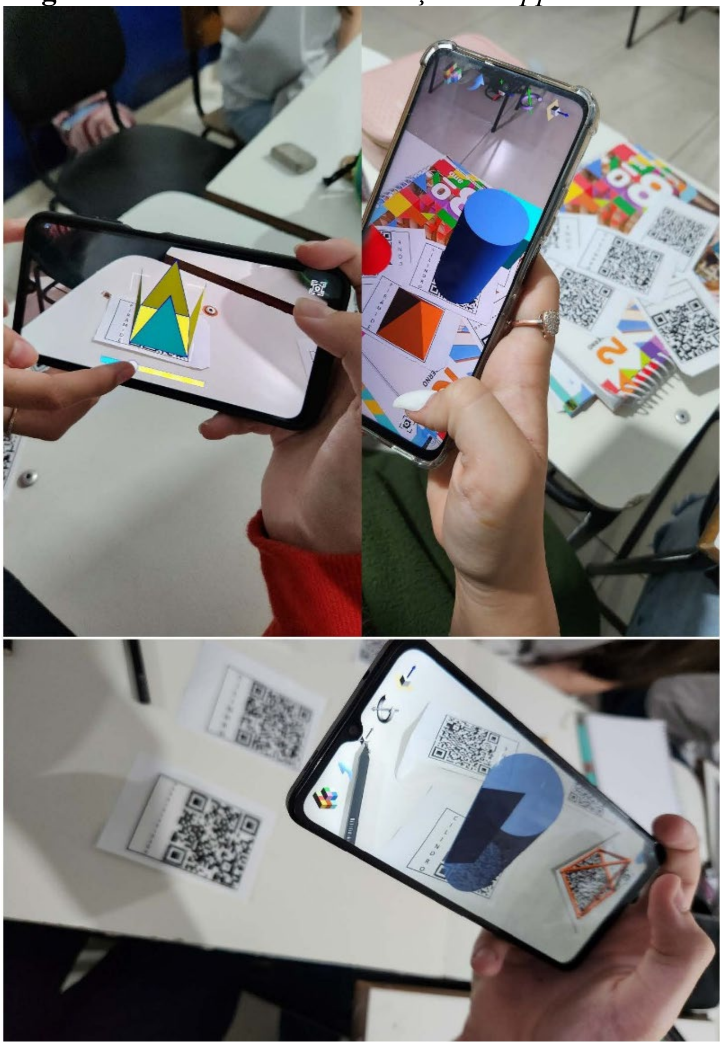
No início da experimentação, foi entregue, a cada estudante de duas turmas de 8° Ano do Ensino Fundamental do Colégio Inovação, do município de Guarantã do Norte - MT, que participou da pesquisa, o questionário diagnóstico inicial (Apêndice A). Solicitou-se aos alunos que respondessem tal questionário em cerca de cinco minutos, pois, conforme o especificado anteriormente, o questionário continha apenas oito perguntas objetivas cujas respostas eram do tipo “sim ou não”. O questionário tinha o objetivo de identificar, de forma ágil, o conhecimento prévio dos alunos sobre sólidos geométricos. Além disso, esse instrumento também foi utilizado para fins de validação estatística da proposta, possibilitando a comparação entre os dados coletados antes e após a aplicação da sequência didática. Tal ação permitiu uma análise mais consistente sobre os impactos da intervenção no processo de aprendizagem dos estudantes.

Com a conclusão do preenchimento do questionário, se passou à segunda etapa da aplicação em sala, que consistiu na exploração do aplicativo Sólidos RA pelos estudantes. Para essa etapa, considerando a necessidade de uso de aparelhos celulares e a disponibilidade destes entre os alunos, a turma foi organizada em grupos de três a cinco estudantes, sendo que cada grupo contava com ao menos um dispositivo móvel com o aplicativo previamente instalado. Após a organização dos grupos, foram entregues aos estudantes os códigos QR, relativos a cada um dos sólidos geométricos a serem estudados.

Tendo em vista que essa etapa permite a visualização tridimensional dos sólidos e visa reforçar a compreensão de suas estruturas, os alunos foram orientados a explorar detalhadamente os módulos de visualização e planificação disponíveis no aplicativo para cada um dos sólidos abordados, os quais são: cubo, paralelepípedo, cilindro, cone e pirâmide.

Após a exploração completa dos sólidos no aplicativo por todos os alunos de cada grupo, foi entregue a cada grupo um relatório (Apêndice B), no qual deveriam registrar suas observações sobre as características de cada sólido visualizado. A atividade foi concluída com um debate rápido entre os grupos, permitindo a troca de percepções e a consolidação coletiva dos conhecimentos adquiridos por meio da ferramenta digital. Para a realização dessa atividade, foi utilizado um tempo aproximado de 50 minutos.

Figura 22: Momento de utilização do *app* Sólidos RA



Fonte: elaborado pelo autor.

As Figuras 22 e 23 ilustram os momentos de realização da atividade na qual os alunos participantes da pesquisa exploram os módulos de visualização e planificação do aplicativo Sólidos RA. As imagens ilustram a interação dos estudantes com os dispositivos móveis, experimentando comandos e observando atentamente os modelos tridimensionais projetados em realidade aumentada.

Figura 23: Momento de utilização do *app* Sólidos RA

Fonte: elaborado pelo autor

Essa etapa destacou-se pelo elevado nível de interesse demonstrado pelos estudantes, que se mostraram bastante motivados diante da possibilidade de interagir com os sólidos por meio da realidade aumentada. A exploração digital despertou a curiosidade dos alunos e gerou engajamento, tornando o aprendizado mais atrativo e dinâmico. Além do entusiasmo inicial, observou-se que a experiência favoreceu a participação ativa dos alunos, estimulando o trabalho em grupo e a troca de ideias durante a análise das estruturas tridimensionais. Esse envolvimento, evidenciado pelas interações e pelo entusiasmo em sala, configurou-se como um ponto positivo relevante da pesquisa, uma vez que, reforça o potencial pedagógico do uso da realidade aumentada no ensino de conceitos geométricos.

Com a finalização da etapa de exploração do aplicativo, deu-se início à terceira etapa da sequência didática: a construção dos modelos manipuláveis.

Nesta fase, os alunos foram convidados a construir, fisicamente, os sólidos geométricos que haviam sido visualizados e analisados por meio do aplicativo Sólidos RA. A atividade teve como objetivo reforçar a compreensão das propriedades estruturais de cada sólido, promovendo uma experiência concreta e tátil que complementasse a visualização digital.

Para otimizar o tempo de aplicação da sequência didática e manter a organização do trabalho em sala, os mesmos grupos formados na etapa anterior foram mantidos. A cada grupo foram entregues planificações previamente impressas dos sólidos em foco. Com esse material em mãos, os alunos realizaram o recorte, a dobra e a colagem das planificações, montando os respectivos modelos tridimensionais. Para a execução dessa atividade, foi utilizado um tempo aproximado de 50 minutos.

Essa etapa proporcionou aos estudantes o contato direto com as formas geométricas por meio da manipulação de seus elementos constituintes (arestas, vértices e faces), favorecendo não apenas o entendimento das estruturas espaciais, mas também o desenvolvimento da coordenação motora fina, do trabalho em equipe e da autonomia na execução das tarefas. O “aprender fazendo” foi o mote dessa etapa.

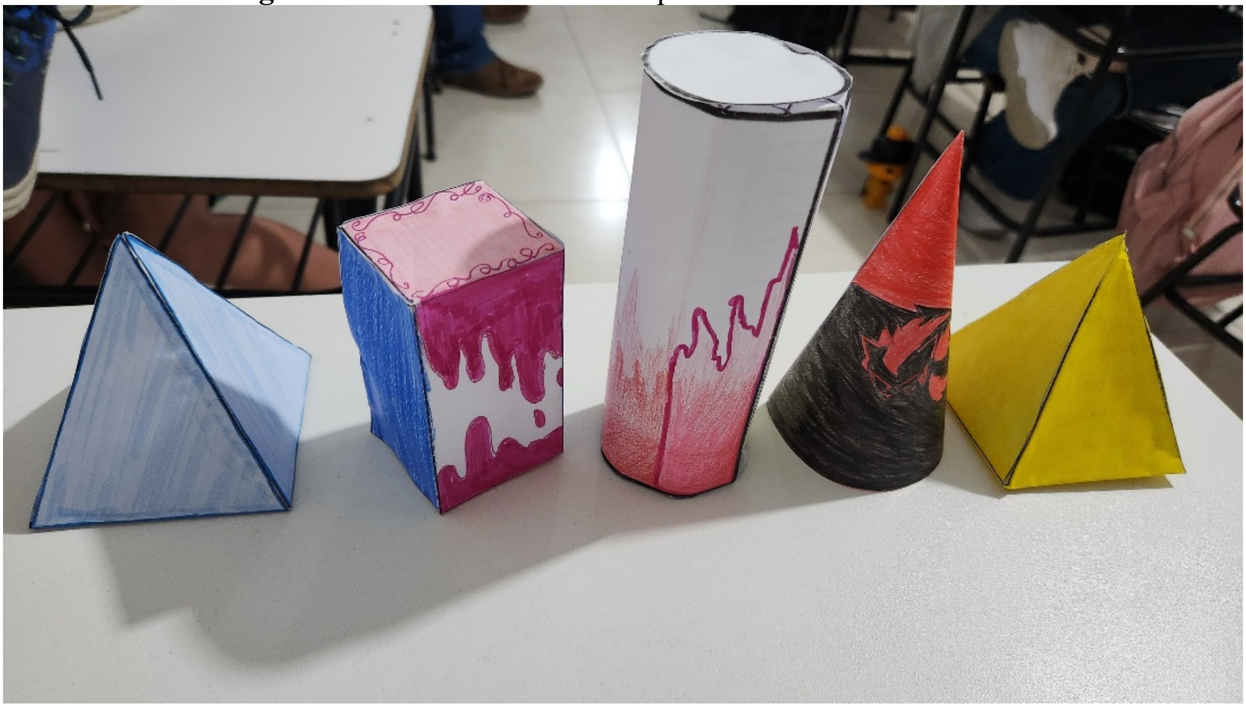
De modo qualitativo, essa etapa também se destacou pelo empenho e dedicação demonstrados pelos alunos durante a construção dos modelos. Observou-se um envolvimento efetivo no processo de recorte, dobra e montagem, o que refletiu não apenas o interesse pela atividade prática, mas também a valorização da experiência concreta como parte do aprendizado. A confecção dos sólidos funcionou como um momento de consolidação dos conhecimentos adquiridos nas etapas anteriores, permitindo com que os estudantes associassem a visualização digital com a materialização física das figuras, fortalecendo, assim, a compreensão das propriedades geométricas e ampliando o significado do estudo dos sólidos.

As Figuras 24 e 25 apresentam registros fotográficos de alguns dos modelos manipuláveis construídos pelos alunos durante a terceira etapa da sequência didática. As imagens evidenciam o envolvimento dos estudantes na montagem dos sólidos geométricos a partir das planificações previamente fornecidas, demonstrando a aplicação prática dos conhecimentos adquiridos e a consolidação do aprendizado por meio da experiência concreta. O acabamento dos modelos (pintura) indica o esmero dos alunos.

Após a construção dos modelos manipuláveis, deu-se início à quarta etapa da sequência didática: a aula sobre o cálculo de áreas e volume.

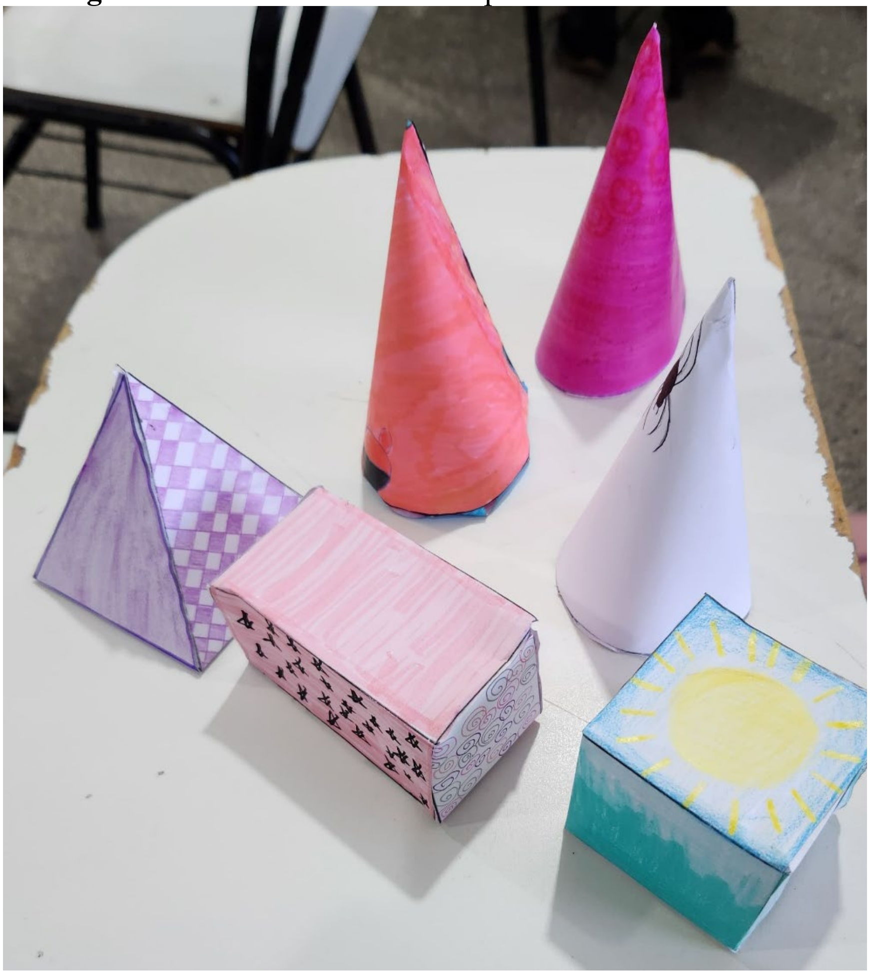
Nesta etapa, foi realizada uma aula expositiva com o uso do quadro branco, na qual foram apresentadas aos alunos as fórmulas matemáticas utilizadas no cálculo da área da superfície e do volume dos sólidos geométricos estudados. Na exposição se buscou estabelecer conexões diretas entre os modelos manipuláveis construídos anteriormente e as expressões algébricas que descrevem suas propriedades geométricas.

Figura 24: Modelos construídos pelos alunos do 8° Ano A



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 25: Modelos construídos pelos alunos do 8° Ano B



Fonte: elaborado pelo autor.

Durante a aula, cada fórmula foi discutida em conjunto com exemplos práticos, de modo a promover a compreensão de seu significado físico e aplicação. Os alunos foram incentivados a relacionar as dimensões observadas nos modelos como, altura, raio, arestas e base, aos elementos presentes nas fórmulas, favorecendo uma aprendizagem mais significativa e contextualizada.

Essa etapa teve papel fundamental na transição do conhecimento empírico para o formal, permitindo com que os estudantes visualizassem, de forma concreta, como as medidas dos sólidos se traduzem em cálculos matemáticos.

Com a aula sobre as fórmulas concluída, deu-se início à quinta etapa da sequência didática: a aplicação prática das fórmulas.

Nesta fase, os alunos foram convidados a aplicar, de forma prática, os conhecimentos adquiridos na etapa anterior. Após a exposição teórica sobre as fórmulas de cálculo de área da superfície e volume dos sólidos geométricos, foi proposto que cada grupo utilizasse régua para medir os modelos manipuláveis que haviam construído na terceira etapa.

A partir das medidas obtidas como comprimento, largura, altura, raio ou arestas, conforme o tipo de sólido, os estudantes deveriam aplicar as fórmulas correspondentes para calcular a área total da superfície e o volume de cada figura. Essa atividade prática teve como objetivo consolidar o entendimento das expressões matemáticas, demonstrando sua aplicabilidade em situações reais e concretas.

Além de favorecer a internalização dos conceitos geométricos, essa etapa estimulou o raciocínio lógico, a autonomia, a cooperação entre os membros dos grupos e a habilidade de interpretar e utilizar medidas em contextos significativos. A resolução dos cálculos foi acompanhada pelo professor, que auxiliou na correção dos procedimentos e esclarecimento de dúvidas.

Para finalizar, foi realizada a sexta e última etapa da experimentação: aplicação do questionário diagnóstico final.

Com o objetivo de avaliar quantitativamente a percepção dos estudantes sobre a proposta desenvolvida, bem como validar estatisticamente os efeitos da metodologia empregada, coletou-se dados por meio do referido questionário. O questionário diagnóstico final (Apêndice C) foi estruturado com perguntas objetivas e escalas de avaliação, permitindo uma análise quantitativa das respostas. Os itens abordaram diversos aspectos da proposta: a utilidade do aplicativo Sólidos RA na visualização dos sólidos geométricos; a eficácia da construção dos modelos manipuláveis para o entendimento das formas; a contribuição da comparação entre modelos físicos e digitais; a capacidade dos alunos de aplicar corretamente as fórmulas de área e volume; e o nível geral de satisfação com a experiência vivenciada.

Além disso, foram avaliados o grau de compreensão do passo a passo das ações desenvolvidas, a clareza da linguagem utilizada, a qualidade da metodologia e a satisfação global dos estudantes com a aplicação prática e suas ferramentas. Os alunos também atribuíram uma nota de 0 a 10 à proposta e indicaram se recomendariam ou não a metodologia adotada a outros alunos.

Os resultados obtidos a partir dessas avaliações são apresentados a seguir, organizados em tabelas e gráficos elaborados com o uso de técnicas da estatística descritiva e inferencial. Essa sistematização dos dados busca oferecer uma visão clara e objetiva do impacto da proposta no processo de ensino-aprendizagem, permitindo a análise comparativa entre o desempenho inicial e os avanços observados após a intervenção.

5.2 Estatística Descritiva e Inferencial: Resultados e Discussões

Nesta seção são apresentadas e comentadas as análises estatísticas efetuadas com base nos dados coletados por meio de questionários diagnósticos inicial e final. A análise destes dados se deu através de técnicas descritivas e inferências, inicialmente, a partir de organização e tabulação destes dados por meio de planilhas eletrônicas (Excel) e, posteriormente, com o uso dos *softwares* estatísticos R e Rstudio.

Cabe lembrar que, foram coletados dados por meio de um questionário diagnóstico inicial (Apêndice A), destinado a estimação do conhecimento prévio dos alunos sobre os temas abarcados pela sequência didática. Neste intento, foram consultados 26 alunos (amostra) de duas turmas de 8º Ano do Colégio Inovação, do município de Guarantã do Norte – MT, no ano de 2025.

Em seguida, ocorreu a aplicação da sequência didática, conforme o descrito na seção 5.1, e, ao final, se aplicou o questionário diagnóstico final (Apêndice C), que teve como objetivo avaliar a qualidade do material preparado e o nível de satisfação dos alunos com a sequência trabalhada.

Ao se proceder o processamento e análise dos dados, em um primeiro momento ocorreu a análise descritiva das 8 questões relativas ao questionário diagnóstico inicial. As análises dos percentuais obtidos, inerentes às respostas “sim” e “não”, foram apoiadas por gráficos de setores, que auxiliaram na compreensão das informações extraídas.

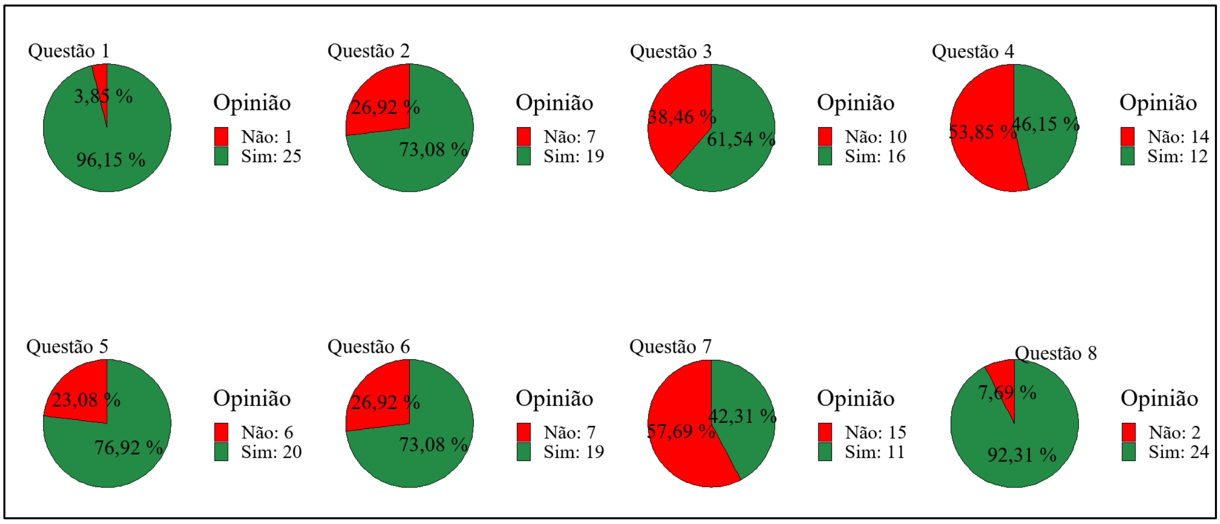
Ato contínuo, se procedeu igual análise descritiva de 10 questões (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10 e 12) do questionário diagnóstico final. Assim como o que foi feito para o questionário diagnóstico inicial, além das análises, foram construídos gráficos de barras, que sumarizaram as quantidades e porcentagens relativas às respostas obtidas.

Em seguida, para as notas atribuídas pelos alunos, referentes às questões 8 e 11, foram também construídos gráficos do tipo histograma, *boxplot* e curva de densidade de probabilidade, a fim de se avaliar o comportamento da distribuição destas variáveis. Para os dados destas questões, foram calculadas as principais estatísticas descritivas, apresentadas na subseção 2.5.1. Posteriormente, para ambos os conjuntos de dados inerentes a estas duas questões, foi aplicado o teste estatístico de normalidade de Shapiro-Wilk, para se verificar se os dados apresentariam distribuição normal ou não, e, posteriormente, se utilizou o teste não paramétrico de postos sinalizados de Wilcoxon para localização para se investigar se havia indicativo de que as medianas encontradas em cada uma destas variáveis coletadas seriam maiores ou iguais 7,0. O valor 7,0 foi considerado dada a sua boa magnitude e por este representar um nível de aceitação satisfatório para a sequência didática, se atribuído como nota.

5.2.1 Os Dados Coletados: Análises e Discussões

Os dados atrelados às questões de 1 a 8 do questionário diagnóstico inicial, destinado a sondar o conhecimento prévio dos alunos, quanto aos assuntos ou conhecimentos abordados na sequência didática, estão sumarizados nos gráficos de setores presentes na Figura 26.

Figura 26: Sumário dos dados referentes às questões de 1 a 8 do questionário diagnóstico inicial.



Fonte: resultados da pesquisa.

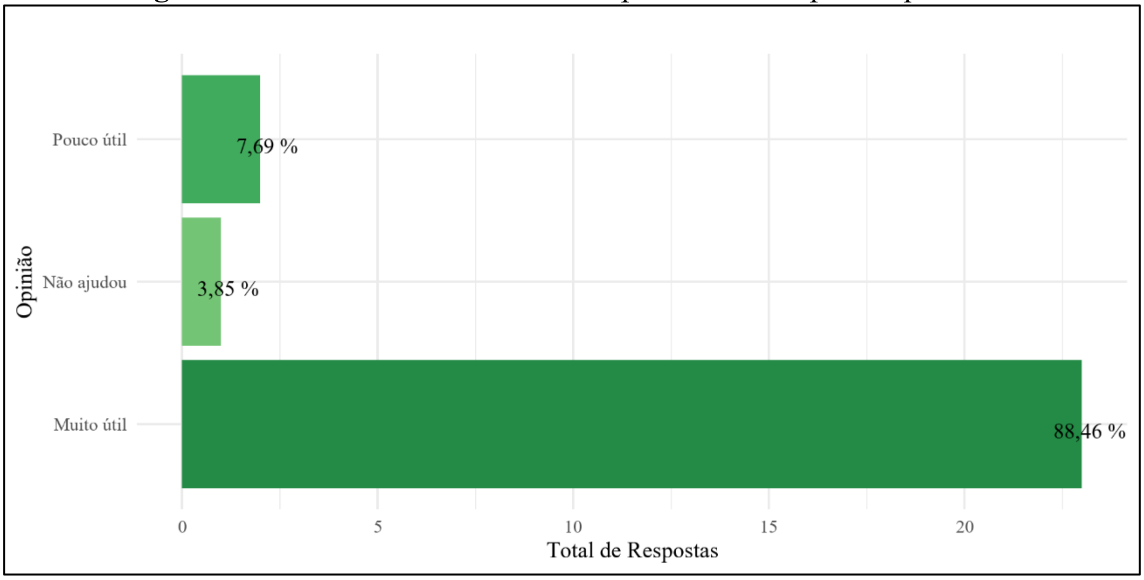
A avaliação das respostas do questionário diagnóstico inicial, fornecidas pelos 26 alunos, indicaram que as principais dificuldades destes se concentraram nos assuntos relativos às questões 3, 4 e 7, que dizem respeito, respectivamente, à distinção entre uma figura plana e um sólido geométrico, à visualização de um sólido geométrico aberto em um desenho (planificação) e à visualização de sólidos geométricos desenhados em papel. As respostas das 8 questões nortearam as ações do docente. Desta forma, se buscou sanar o déficit geral de aprendizado dos alunos, com especial atenção aos tópicos sobre os quais as dúvidas recaíram com maior frequência.

Ao final do trabalho efetuado com sequência didática, se aplicou o questionário diagnóstico final, que gerou os dados que foram analisados e deram origem aos resultados e discussões que seguem. Assim, cada questão do referido questionário é sequencialmente analisada a seguir.

Questão 1 - O aplicativo Sólidos RA ajudou a visualizar os sólidos geométricos?

Os percentuais relativos às repostas obtidas para a questão 1 encontram-se sumarizados no gráfico de barras presente na Figura 27.

Figura 27: Percentuais relativos às respostas obtidas para a questão 1



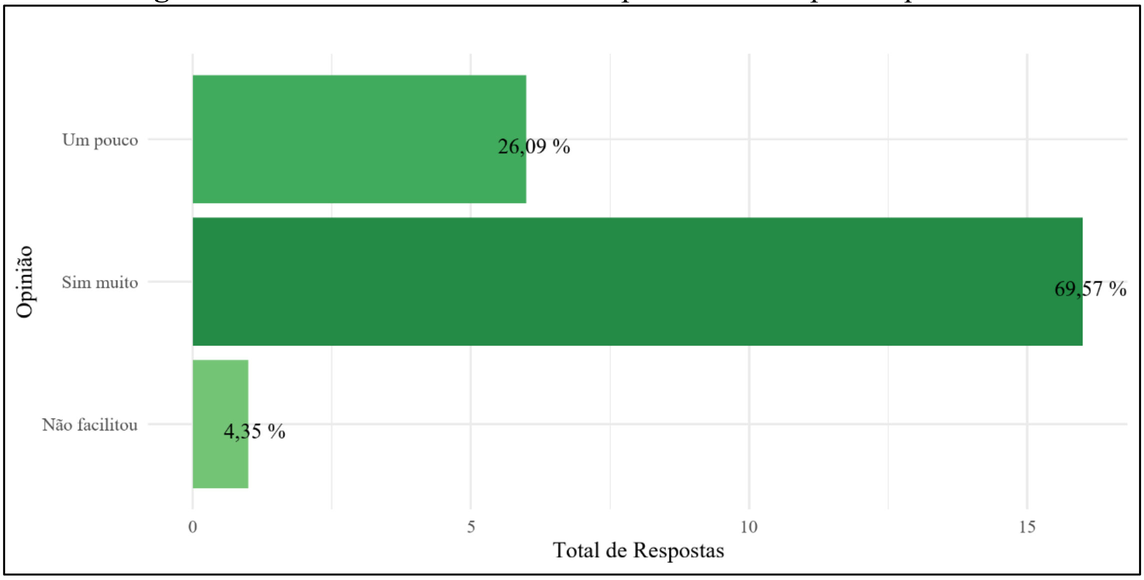
Fonte: resultados da pesquisa.

No gráfico acima, verifica-se que a grande maioria dos alunos, 88,46%, avalia que o aplicativo ajuda muito na visualização dos sólidos geométricos. Em contrapartida, 11,54% não acreditam na utilidade efetiva do aplicativo. Neste caso, apesar de um pequeno percentual dos alunos acreditarem na irrelevância do recurso digital utilizado, percebe-se uma adesão massiva a ele.

Questão 2 - A atividade de construção dos modelos manipuláveis facilitou o entendimento dos sólidos?

Na questão 2, se buscou avaliar se a atividade de construção de modelos manipuláveis facilitou ou não o entendimento dos alunos sobre os sólidos abordados. Os percentuais relativos às respostas obtidas são apresentados no gráfico de barras da Figura 28

Figura 28: Percentuais relativos às respostas obtidas para a questão 2



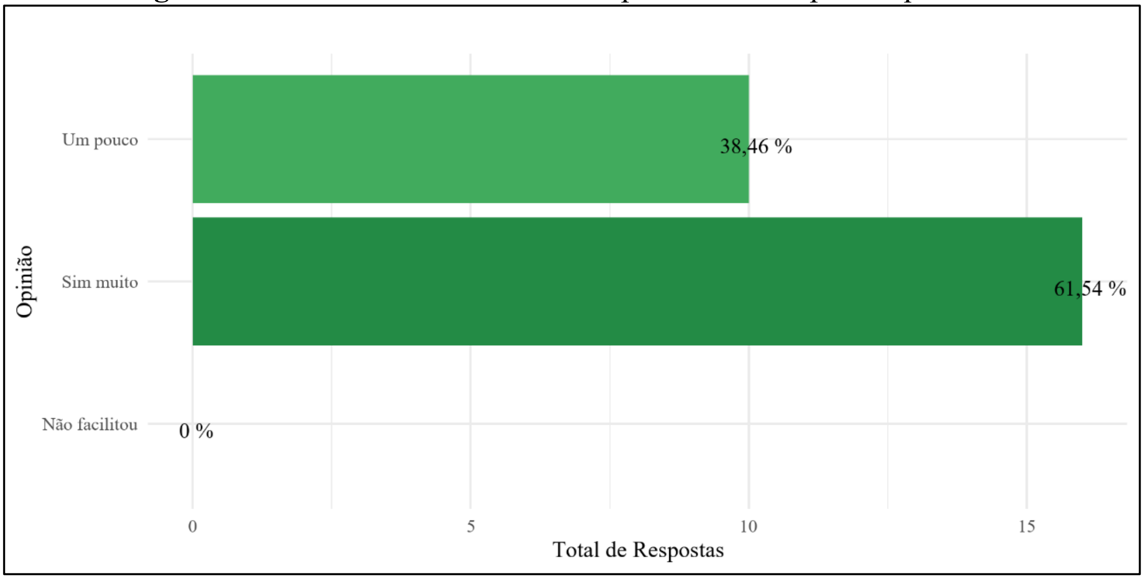
Fonte: resultados da pesquisa.

No gráfico acima, observa-se que 69,57% dos alunos indicam que a atividade facilitou muito o entendimento, 26,09% acreditam que esta facilitou um pouco e apenas 4,35% apontaram a ineficácia da atividade. Se os percentuais que apontam para algum grau de eficácia dos modelos manipuláveis forem considerados, verifica-se que a sua aceitação e contribuição para o processo ensino-aprendizagem de sólidos geométricos foi tida como satisfatória. Na verdade, os resultados obtidos para este recurso didático são comparáveis aos obtidos para o objeto de aprendizagem digital (Sólidos RA). Mesmo que destinados a um mesmo fim, dada a natureza distinta de ambos os recursos didáticos (digital e físico), infere-se que cada um deles desenvolva aspectos cognitivos parcialmente distintos e complementares do aluno, no sentido de favorecer e fortalecer o seu entendimento da realidade geométrica. De tal elucubração, depreende-se que usar os tais recursos distintos de modo conjugado venha a favorecer o aprendizado de forma holística.

Questão 3 - Comparar os modelos físicos com o aplicativo ajudou na compreensão das formas geométricas?

Na questão 3 se buscou saber da avaliação dos alunos sobre a efetiva contribuição do uso das formas geométricas de modelos físicos reais (modelos manipuláveis) para a compreensão dos sólidos geométricos, quando comparado ao uso de modelos digitais gerados pelo aplicativo de realidade aumentada. No gráfico de barras presente na Figura 29 estão presentes os percentuais estratificados, relativos aos dados coletados.

Figura 29: Percentuais relativos às respostas obtidas para a questão 3



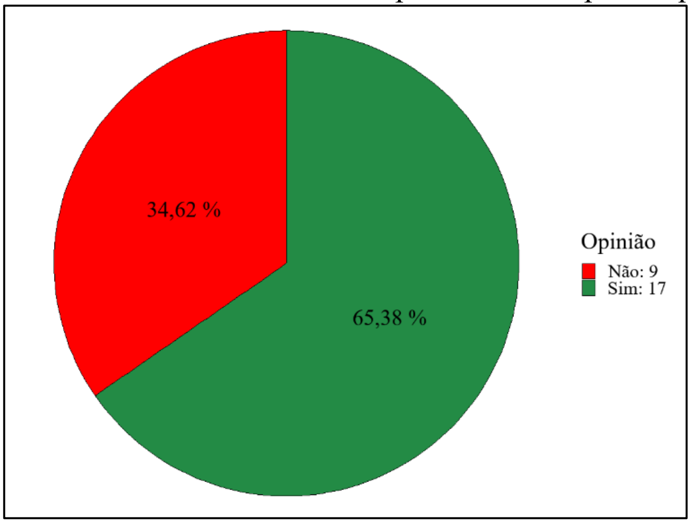
Fonte: resultados da pesquisa.

Averiguou-se que 61,54% dos alunos indicaram que a atividade executada ajudou muito na compreensão dos sólidos e 38,46% exararam que atividade ajudou pouco. Mais uma vez, verifica-se que, em algum grau, todos os alunos indicaram que a atividade, tal como foi proposta, auxiliou na compreensão dos sólidos geométricos e das definições a eles associadas. Não houve, portanto, quem negasse plenamente que tal impacto positivo ocorreu.

Questão 4 - Você conseguiu calcular corretamente a área e o volume dos sólidos usando os modelos e o aplicativo?

Já, questão 4, aborda a possibilidade de execução e de correção de cálculo de áreas e volumes dos sólidos usando, tanto os modelos manipuláveis, quanto os sólidos gerados pelo aplicativo de realidade aumentada. Na Figura 30 encontra-se um gráfico de setores que externa os percentuais obtidos mediante o processamento dos dados de opinião coletados.

Figura 30: Percentuais relativos às respostas obtidas para a questão 4



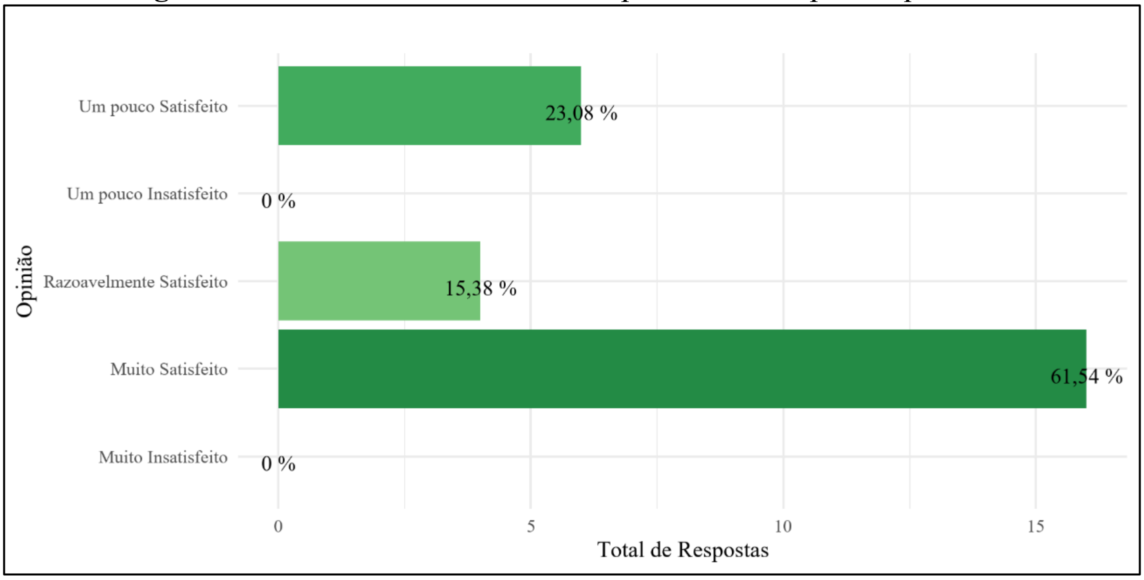
Fonte: resultados da pesquisa.

Observando o gráfico, verifica-se que 65,38% dos alunos conseguiram fazer os cálculos corretamente tendo por base, tanto os modelos físicos, quanto os modelos digitais gerados pelo aplicativo. No entanto, 34,62% dos discente afirmaram que não conseguiram realizar os cálculos corretamente. Aqui suspeita-se que, provavelmente, os alunos que não conseguiram fazer os cálculos corretamente, sejam os mesmos que apresentam algum grau de insatisfação na questão anterior. Porém, nada pode ser verdadeiramente afirmado.

Questão 5 - Qual o foi o seu nível de satisfação com a experiência nesta aplicação prática e uso de suas ferramentas

Com relação à questão 5, por meio desta se buscou avaliar a satisfação dos discentes com relação à experiência proporcionada pela aplicação prática e uso de suas ferramentas propostas. A Figura 31 apresenta os percentuais obtidos para as respostas dadas a esta questão.

Figura 31: Percentuais relativos às respostas obtidas para a questão 5



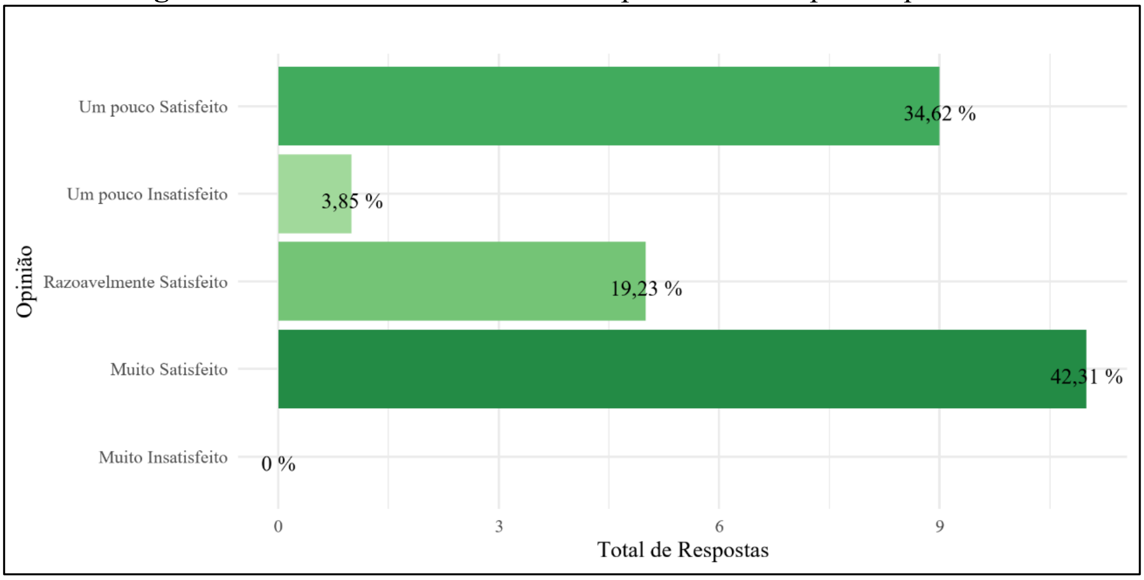
Fonte: resultados da pesquisa.

Para esta questão, avaliou-se que 61,54% dos discentes estão muito satisfeitos com a experiência e 38,46% apresentam apenas alguma satisfação. Dos resultados, verifica-se que houve, em algum grau, a satisfação geral dos discentes. Novamente verifica-se aqui que houve um percentual de alunos que não se sentiram plenamente satisfeitos. Desse resultado, suspeita-se que tal grupo seja formado pelos alunos que não compreenderam totalmente as nuances dos sólidos e não conseguiram fazer os cálculos propostos, conforme o levantado em questões anteriores. Supõe-se que seja este o motivo que lhes gerou alguma frustração com a experiência.

Questão 6 - Qual foi o seu nível de satisfação com a compreensão do passo a passo e aprendizado das atividades propostas nesta aplicação e suas ferramentas?

Com a questão 6 se pretendeu avaliar o nível de satisfação com a compreensão do passo a passo e aprendizado relativo às atividades e suas ferramentas propostas aos alunos. Os resultados obtidos para a questão são apresentados no gráfico da Figura 32.

Figura 32: Percentuais relativos às respostas obtidas para a questão 6



Fonte: resultados da pesquisa.

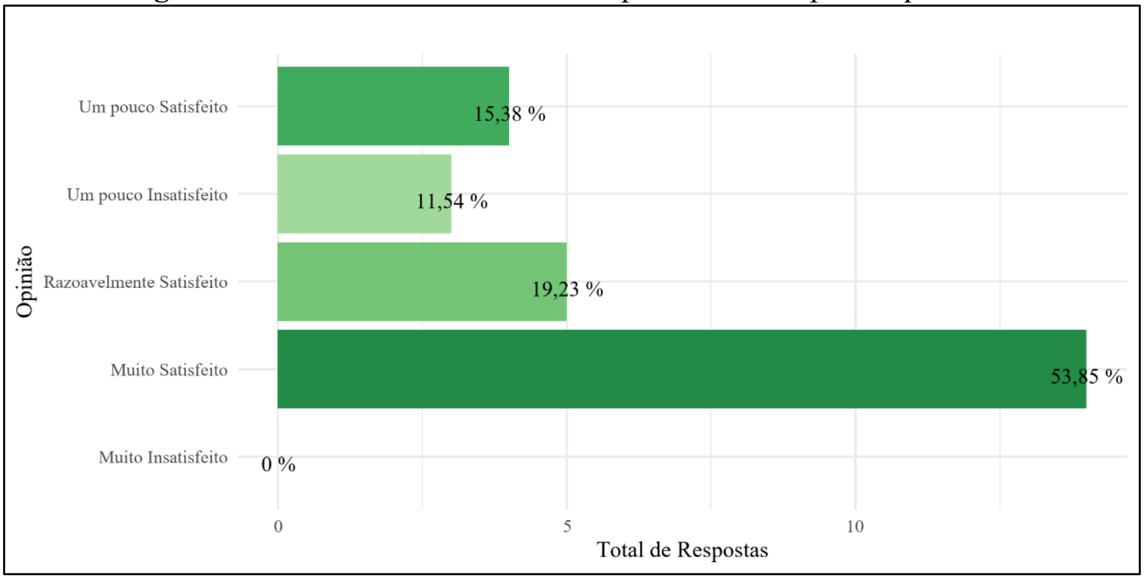
Por meio dos dados coletados para esta pergunta, verificou-se que apenas 42,31% dos discentes estão muito satisfeitos com a compreensão do passo a passo e aprendizado relacionado às atividades e suas ferramentas propostas. Por sua vez, 53,85% apresentam alguma satisfação. Neste caso, não foi possível identificar ou supor os fatores motivadores que geraram tais resultados. Porém, pode-se ressaltar que não houve quem tivesse se sentido muito insatisfeito.

Questão 7 - Qual foi o seu nível de satisfação com a qualidade e a linguagem proposta nesta aplicação e suas ferramentas?

Por meio da questão 7 se buscou saber a opinião dos alunos sobre seu nível de satisfação com a qualidade e a linguagem da proposta, considerando a aplicação e suas ferramentas. Os resultados, advindos dos dados processados, são apresentados no gráfico de barras presente na Figura 33.

Constata-se que, para a questão 7, 53,85% dos alunos apresentaram plena satisfação com a qualidade e linguagem da aplicação e suas ferramentas e 34,61% indicam alguma satisfação. Apenas 11,54% se mostraram um pouco insatisfeitos. Estes resultados revelam que com alguns ajustes (entrevistas com os alunos e incorporação de suas queixas com a aplicação) talvez os discentes que tiveram alguma satisfação e os insatisfeitos, possam conseguir ter maior satisfação com a qualidade e a linguagem da aplicação e suas ferramentas.

Figura 33: Percentuais relativos às respostas obtidas para a questão 7

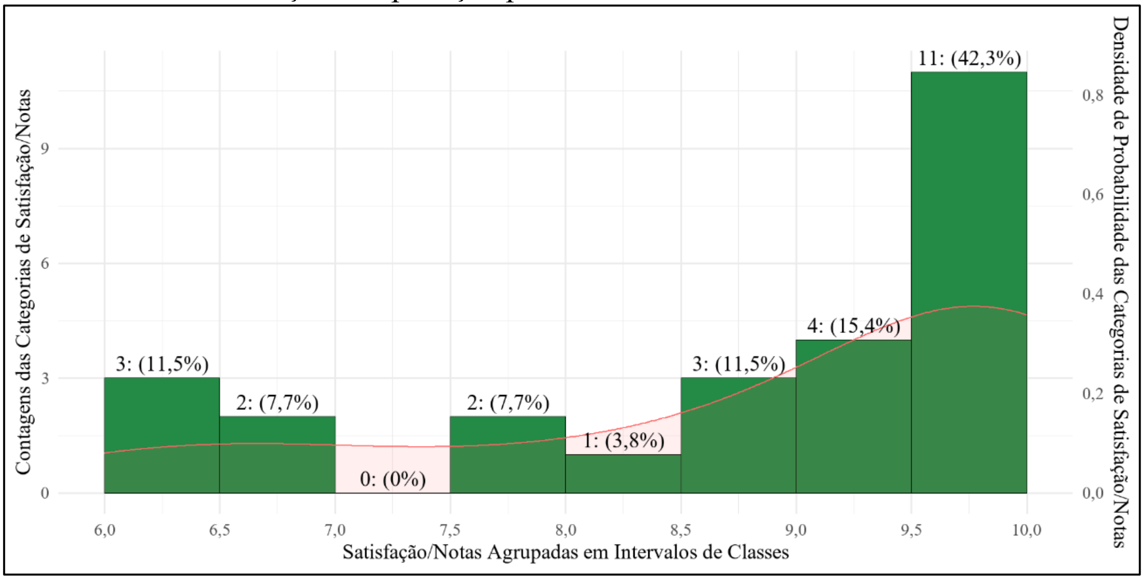


Fonte: resultados da pesquisa.

Questão 8 - Atribua uma nota em uma escala de 0 a 10 (podendo ter números não inteiros, nota: 7,5) sua satisfação com aplicação prática e uso das ferramentas.

Buscando quantificar as impressões dos alunos, por meio da questão 8 se pediu que uma nota fosse atribuída pelos participantes no sentido de se estabelecer numericamente o nível de satisfação destes com a aplicação prática e o uso das ferramentas nesta pesquisa. Assim, na Figura 34 é apresentado um histograma e sua respectiva função de densidade de probabilidade relativos às notas coletadas. Contemplando-se ainda os aspectos inferenciais das análises, na Figura 35 se encontram os resultados que expressam a validação estatística da nota referente à satisfação com a aplicação prática e uso de suas ferramentas propostas.

Figura 34: Histograma com a função de densidade de probabilidade das notas relativas à satisfação da aplicação prática e uso de suas ferramentas.



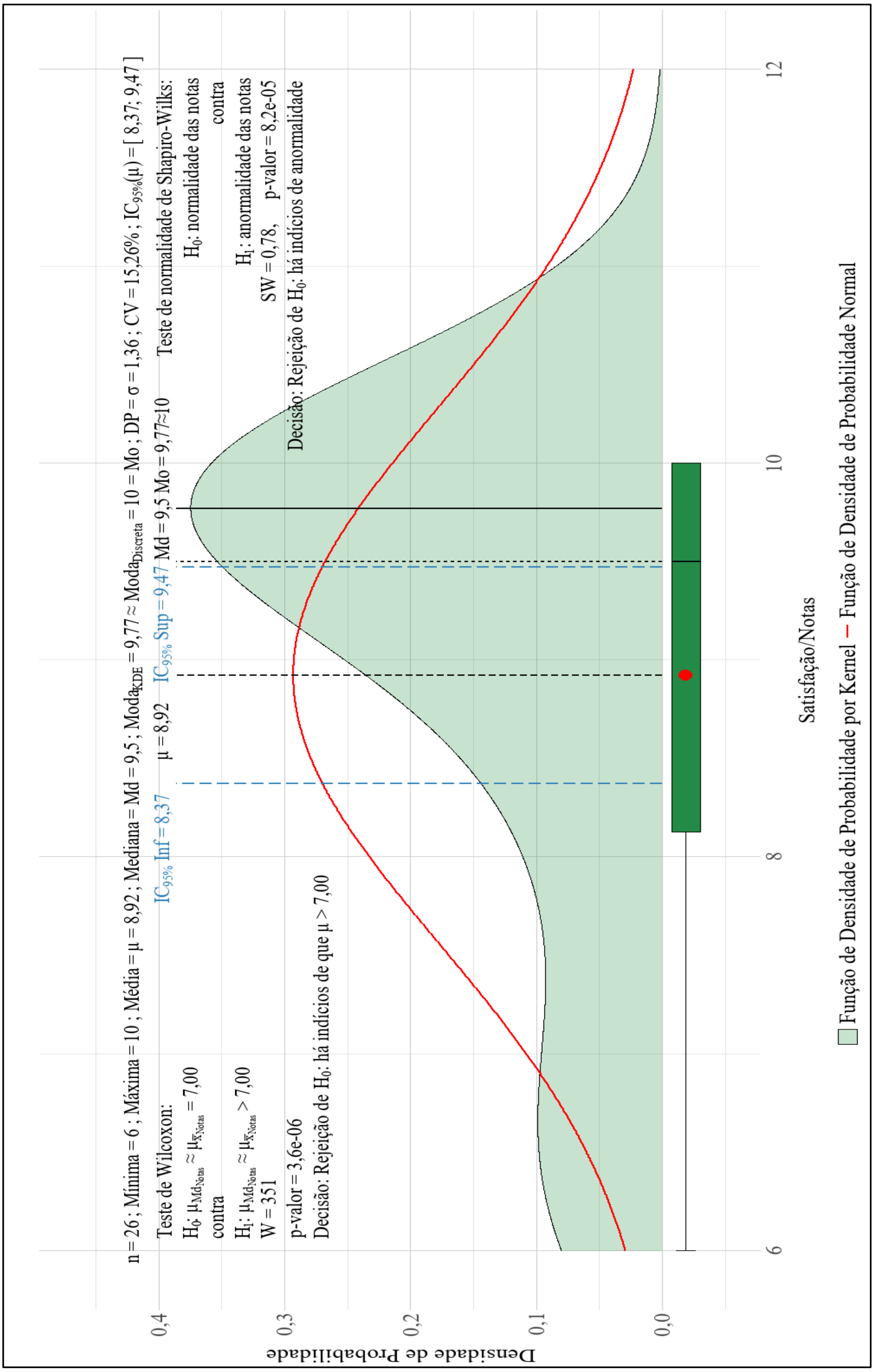
Fonte: resultados da pesquisa.

Verifica-se, a partir dos gráficos presentes nas Figuras 34 e 35, que a distribuição das notas coletadas é assimétrica à direita, estando concentradas, em sua quase totalidade, acima de 7,5. Tal fato indica um nível de satisfação favorável à aplicação prática e o uso das ferramentas utilizadas nesta pesquisa.

Ainda da análise dos gráficos, constata-se que os dados não apresentam normalidade. Tal ausência de normalidade é atestada numericamente pelo teste de Shapiro-Wilk. Por sua vez, o teste de Wilcoxon, ao nível de significância de $\alpha = 10\%$, indicou que a medianas, próximas à média das notas de satisfação, são maiores que 7,00. Isso mostra que há um indicativo de que a aplicação e suas ferramentas tenham tido uma excelente aceitação, pois, segundo o teste, a média dos dados relativos à aplicação prática e suas ferramentas tem a possibilidade de ser maior do que o cálculo preliminar mostrou. Tal análise indica que há uma tendência de que a satisfação dos alunos seja maior do que o que foi apurado preliminarmente. Este resultado inferencial é corroborado pelo comportamento assimétrico à direita, apresentado pelo conjunto de dados, e sua baixa dispersão.

Para a conferência do leitor, na Figura 35 encontram-se valores de parâmetros e estatísticas que embasam as análises acima. A cardinalidade do conjunto de dados é $n = 26$ (quantidade de alunos). Por sua vez, a nota mínima atribuída foi 6 e a nota máxima alcançada foi 10. A média é considerada alta, pois $\mu = 8{,}92$. Acompanhando a média tem-se a mediana com $M_d = 9{,}5$ e a moda ($M_o = 9{,}77$), que ajudam a perceber a assimetria à direita dos dados. Quantificando a dispersão dos dados têm-se o desvio-padrão $s = 1{,}36$ e o coeficiente de variação $CV = 15{,}26\%$ que indicam uma dispersão relativamente pequena entorno da média. O intervalo de confiança é $IC = [8{,}37, 9{,}47\ ]$. Além disso, para Shapiro-Wilk se apresenta o $p - valor = 8{,}2\ .\ 10^{-5}$, que implica na anormalidade dos dados (rejeição de H_0), e para o teste de Wilcoxon se apresenta o $p - valor = 3{,}6\ .\ 10^{-6}$, que mostra a tendência de que $\mu > 7$ (rejeição de H_0).

Figura 35: Validação estatística da nota referente à satisfação com a aplicação prática e uso de suas ferramentas.

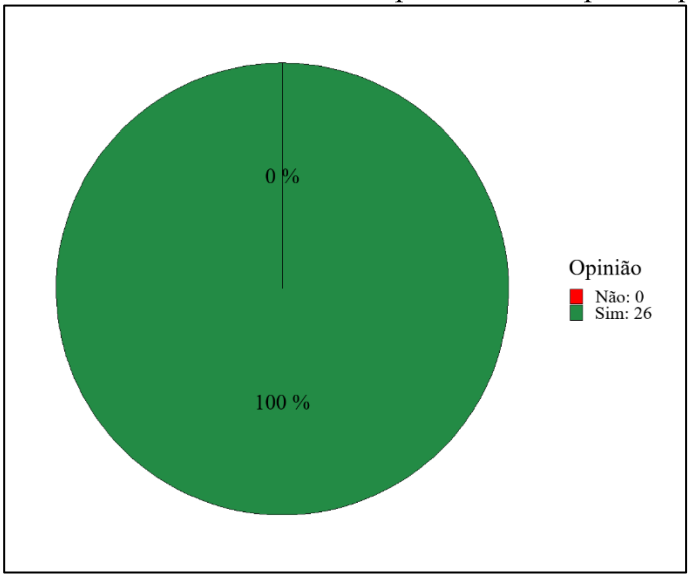


Fonte: resultados da pesquisa.

Questão 9 - Você gostou e indicaria a aplicação prática e o uso de ferramentas?

Na questão 9 se avaliou se os discentes, tendo gostado da experiência didática a que foram submetidos, indicariam ou não a aplicação e suas ferramentas a outros estudantes. Os resultados obtidos desta questão estão sumarizados no gráfico de setores presente na Figura 36.

Figura 36: Percentuais relativos às respostas obtidas para a questão 9



Fonte: resultados da pesquisa.

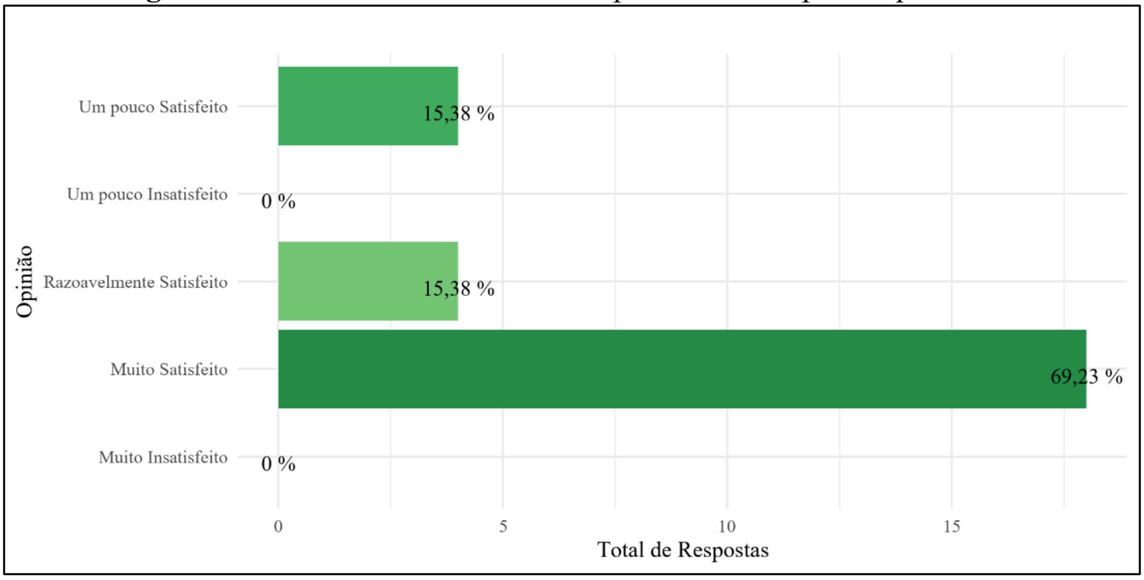
Dos resultados expressos na Figura 36, depreendeu-se que a receptividade dos alunos à metodologia de ensino empregada foi satisfatória, de modo que a totalidade destes respondeu que indicaria a aplicação prática e suas ferramentas a um outro estudante. Logo, tem-se aqui um outro indicativo da boa qualidade da sequência didática e, consequentemente, a validação inconteste desta pesquisa. Neste caso, a manifestação massiva dos alunos, apesar de algum possível inconveniente, se deu no sentido de validar a proposta.

Questão 10 - Qual foi o seu nível de satisfação com a qualidade da metodologia desta atividade?

Na sequência, são apresentados resultados obtidos com base na questão 10, que teve como objetivo levantar o nível de satisfação dos discentes com relação à qualidade metodológica da atividade trabalhada. Os resultados, provenientes do processamento dos dados coletados e tabulados, são apresentados de modo estratificado no gráfico de barras presente na Figura 37.

A maior parte dos alunos, 69,23%, indicou um nível satisfação pleno com a qualidade da metodologia da atividade proposta. O restante dos discentes, 30,76%, apresentou apenas algum grau de satisfação com relação à qualidade da metodologia. Deste resultado, depreende-se que houve uma aceitação da metodologia trabalhada.

Figura 37: Percentuais relativos às respostas obtidas para a questão 10

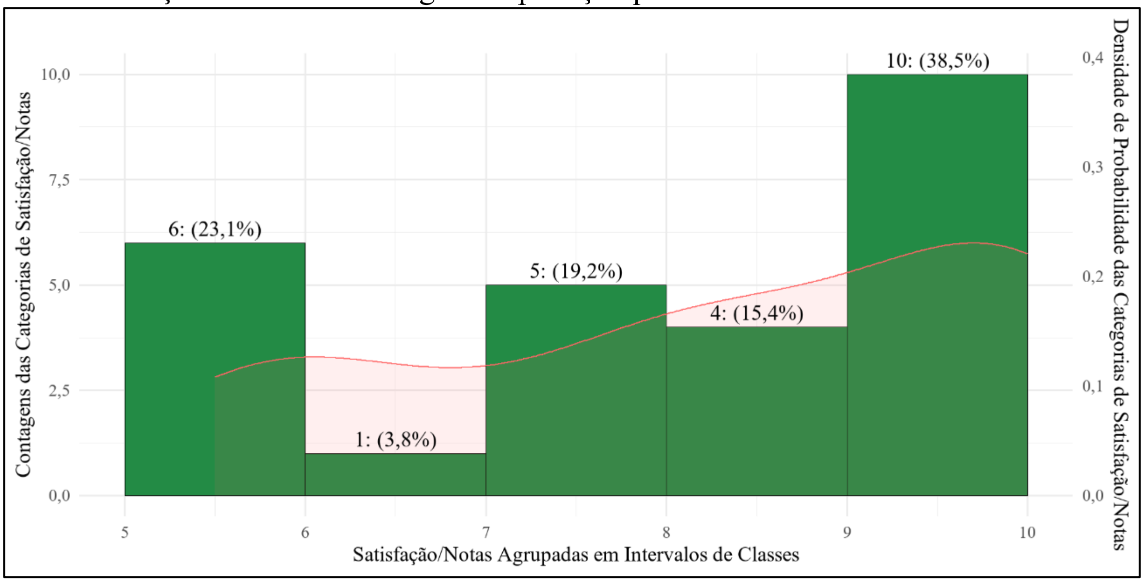


Fonte: resultados da pesquisa.

Questão 11 - Atribua uma nota em uma escala de 0 a 10 (podendo ter números não inteiros, nota: 7,5), indicando sua satisfação com relação à metodologia abordada.

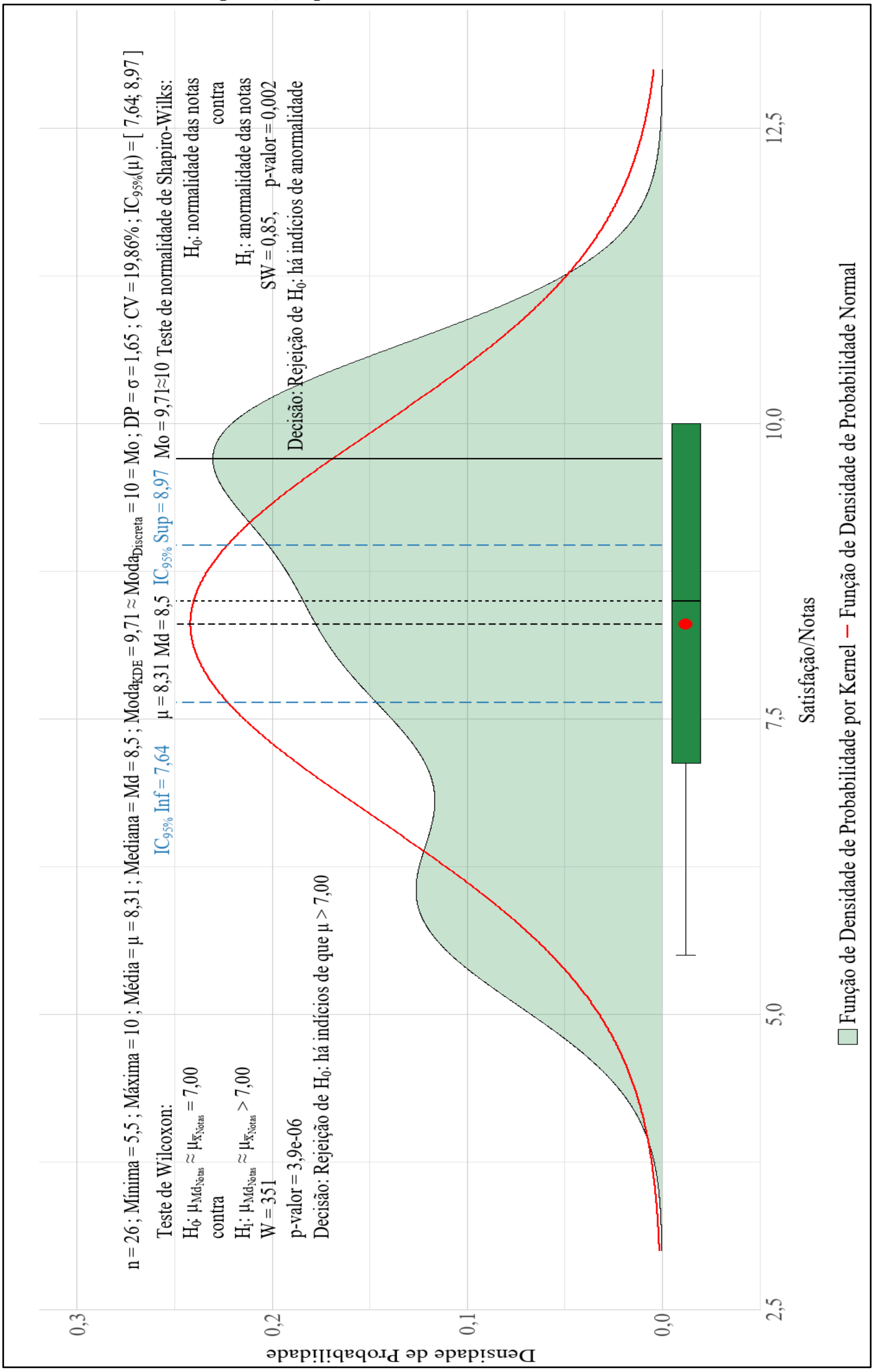
A questão 11 objetivou quantificar a receptividade dos alunos com relação à metodologia utilizada na atividade trabalhada. Os resultados obtidos e as análises efetuadas encontram-se sintetizados nos gráficos e legendas das Figuras 38 e 39.

Figura 38: Histograma com a função de densidade de probabilidade das notas relativas à satisfação com a metodologia da aplicação prática e uso de suas ferramentas.



Fonte: resultados da pesquisa.

Figura 39: Validação estatística da nota referente à satisfação com a metodologia da aplicação prática e uso de suas ferramentas.



Fonte: resultados da pesquisa.

Averígua-se, a partir dos gráficos e informações presentes nas Figuras 38 e 39, que a distribuição das notas relacionadas à satisfação dos alunos com relação à metodologia utilizada na aplicação prática e suas ferramentas é assimétrica à direita. Verifica-se que as notas estão concentradas, em grande parte, acima de 7,0. Este fato indica a boa aceitação da metodologia por parte dos alunos.

Visualmente, depreende-se dos gráficos que os dados não apresentam normalidade. A anormalidade dos dados foi posta à prova por meio do teste de Shapiro-Wilk e se chegou à comprovação numérica deste fato.

Por sua vez, pelo teste de Wilcoxon, ao nível de significância de $\alpha = 10\%$, há o indicativo de que as medianas, próximas à média das notas de satisfação relacionada à metodologia e suas ferramentas, sejam maiores que 7,00. Assim, conclui-se pela boa qualidade metodológica da aplicação prática e suas ferramentas. Em outras palavras, a média de satisfação com relação à metodologia da aplicação prática e suas ferramentas têm a possibilidade de ser maior que o valor calculado *a priori* e, consequentemente, a satisfação dos alunos possa ser superior ao estimado inicialmente. Este resultado inferencial é corroborado pelo comportamento assimétrico à direita da distribuição das notas e sua baixa dispersão ao redor da média.

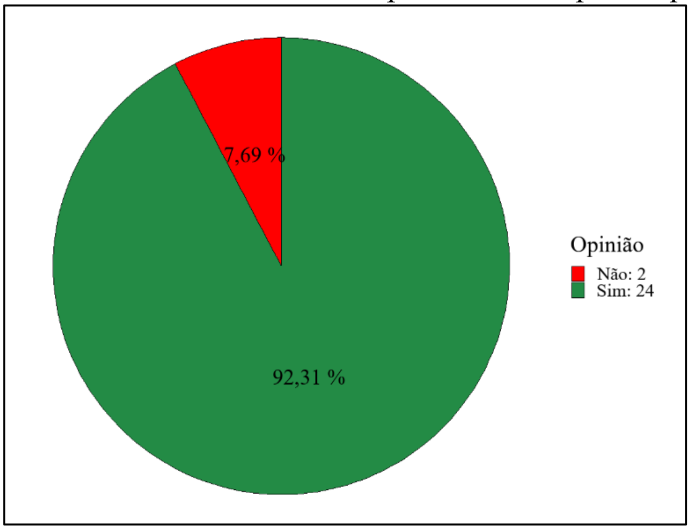
Para a conferência do leitor, na Figura 39 encontram-se valores de parâmetros e estatísticas que embasam as análises acima. Dessa forma, a cardinalidade do conjunto de dados é $n = 26$ (quantidade de alunos). Neste caso, a nota mínima foi 5,5 e a nota máxima foi 10. A nota média é considerada alta, pois $\mu = 8{,}31$. A média é acompanhada pela mediana $M_d = 8{,}5$ e pela moda $M_o = 9{,}71$, as quais também são expressivas. A dispersão ao redor da média é baixa, pois o desvio-padrão é $s = 1{,}65$ e o coeficiente de variação é $CV = 19{,}86\%$. O intervalo de confiança é $IC = [7{,}64\,, 8{,}97\,]$. Para o teste de Shapiro-Wilk se obteve $p - valor = 0{,}002$, que implica na anormalidade dos dados (rejeição de H_0), e para o teste de Wilcoxon se chegou a $p - valor = 3{,}9\,.\,10^{-6}$, que indica uma tendência de que μ>7 (rejeição de H_0).

Questão 12 - Você gostou da metodologia adotada?

Por fim, se lançou mão da questão 12 a fim de se levantar a quantidade de discentes que gostaram ou não da metodologia adotada quando do trabalho com a sequência didática voltada aos sólidos geométricos. O gráfico de setores, presente na Figura 40, externa os percentuais obtidos.

Observando o gráfico de setores (Figura 40), verifica-se que a grande maioria dos alunos, 92,31%, gostou da metodologia. Tal percentual revela mais um resultado importante que, juntamente com todos os outros relativos às demais questões, indica para a validação inconteste da proposta de ensino. Em contrapartida 2 alunos (7,69%) declararam não terem gostado da metodologia adotada. Tal fato gerou alguma estranheza, quando se compara tal resultado com as notas obtidas anteriormente.

Figura 40: Percentuais relativos às respostas obtidas para a questão 12



Fonte: resultados da pesquisa.

6 CONCLUSÕES

Na pesquisa executada e aqui descrita se elaborou uma metodologia de ensino, materializada por meio de uma sequência didática, que aliou a visualização tridimensional de sólidos geométricos, proporcionada pelo *software* educacional Sólidos RA, com a construção e manipulação de modelos geométricos palpáveis. Em adição a isso, se contemplou o cálculo de áreas e volumes tendo por base, tanto os modelos digitais, quanto os modelos físicos. Tal concatenação de métodos visou proporcionar um aprendizado mais ativo e significativo para o aluno, que pudesse superar as limitações dos métodos tradicionais e que promovesse uma melhor compreensão das propriedades geométricas dos sólidos. Cabe especificar que, a elaboração da sequência didática teve por base os ditames da BNCC (Brasil, 2018) e em sua elaboração se buscou atingir objetivos e se desenvolver habilidades nela previstos.

Buscando validar a sequência didática, esta foi trabalhada em duas turmas de 8º Ano do Ensino Fundamental do Colégio Inovação, do município de Guarantã do Norte – MT. Cabe lembrar que, 26 discentes participaram da experimentação e, para fins de validação da sequência didática e verificação de sua eficácia, se coletou dados destes alunos por meio de dois questionários diagnósticos, inicial e final. Os dados coletados, após tabulação e análise estatística descritiva e inferencial, apontaram para a eficácia da metodologia criada e a aceitação da sequência didática construída. Para tanto, além do uso de recursos provenientes da Estatística Descritiva, como o cálculo de medidas de tendência central e de dispersão, se lançou mão de Estatística Inferencial a fim de se analisar a aceitação, tanto da aplicação e suas ferramentas, quanto da metodologia empreendida. Neste intento, se verificou a anormalidade do conjunto de dados e se fez uma análise de suas médias por meio de teste de hipóteses não paramétrico (Wilcoxon). Este último, apontou que a aceitação da sequência didática e da metodologia empregada poderiam, estatisticamente, alcançar um sucesso superior àquele preliminarmente levantado.

Nestes termos, mediante a análise dos dados, se verificou que a proposta de ensino baseada na integração de realidade aumentada com a construção de modelos manipuláveis e que teve como foco os sólidos geométricos (cubo, paralelepípedo, cilindro, cone e pirâmide), foi bem aceita e sua eficácia estatisticamente comprovada.

Há de se ressaltar que, devido à impossibilidade operacional, o tamanho da amostra utilizada, apesar de suficiente, foi tida como pequena. Assim, apesar do sucesso obtido, a fim de se ter uma visão mais ampla da eficácia da sequência didática, esta poderia ter sido aplicada a uma maior quantidade de discentes. Porém, as estatísticas calculadas e os testes de hipóteses coerentemente escolhidos mostraram, indubitavelmente, o sucesso da sequência didática construída.

Por fim cabe externar que, o maior ganho ficou por conta da expertise e *know-how* adquiridos pelo pesquisador, quando da realização da experimentação, da coleta e da análise dos dados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BONA, A. S. D.; SOUZA, M. T. C. C. D. **Aulas investigativas e a construção de conceitos de matemática: um estudo a partir da teoria de Piaget**. **Psicologia USP**, 26, 2015. 240-248. Disponivel em: <http://dx.doi.org/10.1590/0103-656420130025>. Acesso em: 19 set. 2024.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: Ministério da Educação (MEC), 2018. Disponivel em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 13 out. 2024.

BUENO, A.; NEVES, J.; YOSHIKAWA, L.; TIYODA, M.; TANAKA, M. **Geometria no Egito**. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2018. Trabalho apresentado na disciplina MAT0341 - História da Matemática. Acessado em: 01 nov. 2024. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4475052/mod_resource/content/1/Geometria%20no%20Egito.pdf>.

CONOVER, W. J. (1999). **Practical nonparametric statistics** (Vol. 350). John Wiley & Sons. Shapiro, S. S., and Wilk, M. B. (1965), An analysis of variance test for normality (complete samples), Biometrika 52, 591–611.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

FONSECA, J. S.; MARTINS, G. A. **Curso de Estatística**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 1996.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia:** saberes necessários à prática educativa. 27. ed. Rio de Janeiro : Paz e Terra , 1996.

GUIMARÃES, Viviane Guerra. **Ensinando a Geometria Euclidiana no Ensino Fundamental por meio de recursos manipuláveis.** 2022. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2022. Disponível em: <https://repositorio.ufba.br/ri/handle/ri/37235>, Acesso em: 10 out. 2025.

LIMA, Rodrigo Malan Loureiro. **O uso da Realidade Aumentada no ensino de prismas: um referencial didático para professores do ensino médio.** 2021. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2021. Disponível em: <https://repositorio.unilab.edu.br/jspui/handle/123456789/2230>, Acesso em: 10 out. 2025.

MARTINS, M. C. F. A.; LOPES, T. B.; DARSIE, M. M. P. As influências de Platão e Euclides para o desenvolvimento da Geometria. **CoInspiração - Revista dos Professores que Ensinam Matemática**, 2023. Disponivel em: <https://doi.org/10.61074/CoInspiracao.2596-0172.e2023001>. Acesso em: 1 nov. 2024.

MARTINS, T. C.; ROSSETTO, A. G. D. M. **Uma análise do uso de Realidade Aumentada e Realidade Virtual como recursos educacionais**, 2022. Disponivel em: <https://painel.passofundo.ifsul.edu.br/uploads/arq/20220729091300117362 0624.pdf>. Acesso em: 10 out. 2024.

MELO, N. P. S. D. **Atividades com recursos manipulativos para o ensino de Geometria espacial na educação básica**. João Pessoa, PB: Universidade Federal da Paraíba (UFPB),

2023. Disponivel em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/29960/1/NPSM08042024%20.pdf>. Acesso em: 15 out. 2024.

NEINAS, P. **Ensino de matemática com o auxílio da realidade aumentada**. Santa Maria, RS: Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), 2020. Disponivel em: <https://repositorio.ufsm.br/handle/1/24244>. Acesso em: 12 out. 2024.

NETO, J. E. **História da Matemática**. Londrina, PR: Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2016. Disponivel em: <https://cm-kls-content.s3.amazonaws.com/201602/INTERATIVAS_2_0/HISTORIA_DA_MATEMATICA/U1/LIVRO_UNICO.pdf>. Acesso em: 09 out. 2024.
PIAGET, Jean. A Construção do Real na Criança. Trad. Álvaro Cabral. Rio de Janeiro: Zahar, 1970. 360p.

PIAGET, J. **A Epistemologia Genética**. Tradução de Martins Fontes. 3. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

RODRIGUES, Raquel A. B. **Explorando os números primos**. Orientador: Giovane Maia do Vale. 2024. Dissertação - Universidade do Estado de Mato Grosso, Sinop, 2024.

SANTOS, Fredson Conceição dos. **Realidade Aumentada aplicada ao ensino de Geometria Espacial: um desafio para a Educação Matemática.** 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2015. Disponível em: <https://repositorio.ufpa.br/jspui/handle/2011/8021>, Acesso em: 10 out. 2025.

SANTOS, J. A.; FRANÇA, K. V.; SANTOS, L. S. B. D. **Dificuldades na Aprendizagem de Matemática**. São Paulo: Centro Universitário Adventista de São Paulo (UNASP), 2007. Disponivel em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Monografia_Santos.pdf>. Acesso em: 14 set. 2024.

SOUZA, Jaime Batista de. **A Realidade Aumentada e o Ensino de Geometria Espacial: uma proposta didática para o Ensino Médio.** 2021. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2021. Disponível em: <https://repositorio.ufba.br/ri/handle/ri/35318>, Acesso em: 10 out. 2025.

SOUZA, Marlon Maike Moreira de. **Um estudo dos sólidos geométricos por meio da Realidade Aumentada.** 2024. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2024. Disponível em: <https://repositorio.uesb.br/>, Acesso em: 10 out. 2025.

TORI, R.; HOUNSELL, M. D. S. **Introdução à Realidade Virtual e Aumentada**. Porto Alegre: Editora SBC, 2018. Disponivel em: <http://www.de.ufpb.br/~labteve/publi/2018_livroRVA.pdf>. Acesso em: 10 out. 2024.

TURRIONI, A. M. S. **O LABORATÓRIO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO**. Rio Claro (SP): UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA, 2004. Disponivel em: <https://repositorio.unesp.br/server/api/core/bitstreams/8065737c-b131-4bfc-9115-b79c187f09d2/content>. Acesso em: 07 Abril 2025.

VALE, I. **Materiais Manipuláveis**. Viana do Castelo: ESEVC-LEM (Escola Superior de Educação - Laboratório de Educação Matemática), 2002. Disponivel em: <https://www.academia.edu/download/33146967/materiais_manipulaveis.pdf>. Acesso em: 5 out. 2024.

VAZ, D. A. D. F.; FREITAS, M. A. D.; JESUS, E. A. D. **Contribuições Babilônicas:** Redesenhando o Movimento Lógico e Histórico do Cálculo. Jataí, GO: VII Encontro Goiano de Educação Matemática (VII EnGEM), 2019. Disponivel em: <https://anais.sbem-go.com.br/index.php/EnGEM/article/download/125/101>. Acesso em: 1 out. 2024.

WILCOXON, F. (1992). **Individual comparisons by ranking methods**. In Breakthroughs in statistics: Methodology and distribution (pp. 196-202). New York, NY: Springer New York.
Wilcoxon, F., Katti, S., & Wilcox, R. A. (1970). Critical values and probability levels for the Wilcoxon rank sum test and the Wilcoxon signed rank test. Selected tables in mathematical statistics, 1, 171-259.

APÊNDICE A

Questionário Diagnóstico Inicial

APÊNDICE A – Questionário Diagnóstico Inicial

Instruções: Responda SIM ou NÃO para cada pergunta.

1. Você já ouviu falar sobre cubo, cilindro, cone, pirâmide e paralelepípedo?

( ) Sim ( ) Não

2. Consegue identificar um cubo e um cilindro no seu dia a dia?

( ) Sim ( ) Não

3. Sabe a diferença entre uma figura plana e um sólido geométrico?

( ) Sim ( ) Não

4. Você já viu um sólido geométrico aberto em um desenho (planificação)?

( ) Sim ( ) Não

5. Sabe dizer o que são vértices, arestas e faces em um sólido?

( ) Sim ( ) Não

6. Você já aprendeu a calcular a área ou o volume de algum sólido?

( ) Sim ( ) Não

7. Acha difícil visualizar um sólido geométrico apenas por um desenho no papel?

( ) Sim ( ) Não

8. Acredita que usar tecnologia pode ajudar a aprender sobre sólidos geométricos?

( ) Sim ( ) Não

APÊNDICE B

Relatório de Observação

APÊNDICE B – Relatório de Observação aplicado aos alunos ao final da etapa de exploração do *app* sólidos RA.

Relatório de Observação – Exploração com o Aplicativo Sólidos RA

Objetivo da atividade: Explorar os sólidos geométricos com o auxílio do aplicativo “Sólidos RA”, observando suas características tridimensionais e registrando as informações obtidas.

Parte 1 – Preenchimento das características dos sólidos

Sólido	Nº de faces	Nº de vértices	Nº de arestas	Formato das faces	Observações (forma geral, curiosidades etc.)
Cubo					
Paralelepípedo					
Pirâmide (base quadrada)					
Cilindro					
Cone					

Parte 2 – Análise para Debate em Grupo

Com base na observação dos sólidos geométricos por meio do aplicativo **Sólidos RA**, produza um breve relatório descrevendo:

- O que você aprendeu;
- Diferenças e semelhanças entre os sólidos;
- A utilidade da realidade aumentada no processo de aprendizagem;
- Outras observações que você considerar importantes.

Use suas próprias palavras.

____

____

____

APÊNDICE C

Questionário Diagnóstico Final

APÊNDICE C – Questionário Diagnóstico Final

Responda de acordo com a sua experiência (assinale apenas uma opção para cada pergunta):

1. O **aplicativo Sólidos RA** ajudou a visualizar os sólidos geométricos?

   ( ) Muito útil ( ) Pouco útil ( ) Não ajudou

2. A atividade de **construção dos modelos manipuláveis** facilitou o entendimento dos sólidos?

   ( ) Sim, muito ( ) Um pouco ( ) Não facilitou

3. Comparar os **modelos físicos com o aplicativo** ajudou na compreensão das formas geométricas?

   ( ) Sim, muito ( ) Um pouco ( ) Não ajudou

4. Você conseguiu calcular corretamente a **área e o volume dos sólidos** usando os modelos e o aplicativo?

   ( ) Sim ( ) Não

5. Qual o foi o seu nível de satisfação com a **experiência** nesta Aplicação Prática e uso de suas Ferramentas?

   1) ( ) Muito Insatisfeito(a)
   2) ( ) Um pouco Insatisfeito(a)
   3) ( ) Razoavelmente Satisfeito(a)
   4) ( ) Um pouco Satisfeito(a)
   5) ( ) Muito Satisfeito(a)

6. Qual foi o seu nível de satisfação com a **compreensão** do passo a passo e aprendizado das atividades propostas nesta Aplicação e suas Ferramentas?

   1) ( ) Muito Insatisfeito (a)
   2) ( ) Um pouco Insatisfeito (a)
   3) ( ) Razoavelmente Satisfeito (a)
   4) ( ) Um pouco Satisfeito (a)
   5) ( ) Muito Satisfeito (a)

7. Qual foi o seu nível de satisfação com a **qualidade e a linguagem** proposta nesta Aplicação e suas Ferramentas?

   1) ( ) Muito Insatisfeito (a)
   2) ( ) Um pouco Insatisfeito (a)
   3) ( ) Razoavelmente Satisfeito (a)
   4) ( ) Um pouco Satisfeito (a)
   5) ( ) Muito Satisfeito (a)

8. Atribua uma nota em uma escala de 0 a 10 (podendo ter números não inteiros nota: 7,5) sua satisfação com **Aplicação Prática e Uso das Ferramentas**. Nota:___

9. Você gostou e indicaria da **Aplicação Prática e o Uso de Ferramentas**?

   ( ) Sim ( ) Não

10. Qual foi o seu nível de satisfação com a qualidade da metodologia desta atividade?
    1) Muito Insatisfeito (a)
    2) Um pouco Insatisfeito (a)
    3) Razoavelmente Satisfeito (a)
    4) Um pouco Satisfeito (a)
    5) Muito Satisfeito (a)

11. Atribua uma nota em uma escala de 0 a 10 (podendo ter números não inteiros nota: 7,5), indicando sua satisfação com relação a **Metodologia** abordada. Nota:___

12. Você gostou da **Metodologia** adotada?

    ( ) Sim ( ) Não

APÊNDICE D

Sequência Didática Voltada aos Sólidos Geométricos

APENDICE D - Sequência Didática Voltada aos Sólidos Geométricos

Tema:

Realidade Aumentada e Construção de Modelos Manipuláveis no Ensino de Sólidos Geométricos.

Público-alvo:

Alunos do Ensino Fundamental II (8º ou 9º ano).

Conteúdos

- Sólidos geométricos: cubo, paralelepípedo, cilindro, cone e pirâmide.
- Elementos constituintes: faces, arestas e vértices.
- Planificações.
- Área da superfície e volume.

Habilidades da BNCC contempladas

- **EF03MA13** – Associar sólidos geométricos a objetos do cotidiano.
- **EF05MA16** – Relacionar sólidos e suas planificações.
- **EF07MA24** – Resolver problemas de cálculo de volume de blocos retangulares.
- **EF08MA16** – Resolver problemas que envolvem medidas de área.
- **EF08MA18 / EF09MA18** – Resolver problemas envolvendo volumes de prismas e cilindros retos.

Objetivo Geral

Promover a aprendizagem significativa de sólidos geométricos (cubo, paralelepípedo, cilindro, cone e pirâmide) por meio da articulação entre recursos digitais e a construção de modelos manipuláveis, com ênfase na compreensão de suas propriedades e no cálculo de área de superfície e volume.

Objetivos Específicos

- Explorar os sólidos geométricos em ambiente digital interativo, utilizando o aplicativo *Sólidos RA*.
- Construir modelos manipuláveis em papel a partir de planificações, consolidando a percepção espacial.
- Relacionar representações digitais e físicas para a compreensão das propriedades geométricas.
- Aplicar fórmulas de área e volume para os sólidos construídos.
- Desenvolver habilidades como raciocínio lógico, pensamento crítico, autonomia e cooperação.

Organização da Sequência Didática:

Etapa 1 – Exploração do aplicativo *Sólidos RA*

- **Objetivo:** Estimular a percepção espacial por meio da visualização digital interativa tridimensional dos sólidos e de suas planificações.
- **Recursos:** *Smartphones*/*tablets* com o aplicativo *Sólidos RA* e QR *codes* impressos.
- **Duração:** 50 minutos, podendo ser ajustado conforme a realidade da turma.

❖ **Descrição da atividade:**

Nesse primeiro momento, o professor deverá organizar a turma em grupos, definindo a quantidade de integrantes de acordo com a realidade da sala. Porém, se recomendada a formação de grupos com três a quatro alunos. Após a divisão, oriente para que, sempre que possível, cada grupo disponha de um *smartphone* ou *tablet* com o aplicativo Sólidos RA previamente instalado, a fim de facilitar o desenvolvimento da atividade.

Em seguida, o professor fará uma breve explicação sobre o aplicativo, destacando sua utilidade para a visualização de sólidos geométricos tridimensionais em ambiente digital, por meio da tecnologia de realidade aumentada. Para tornar a explicação mais próxima do universo dos alunos, pode-se comparar esse recurso de visualização ao jogo *Pokémon Go*™, que também utiliza a sobreposição de elementos virtuais no espaço real imageado.

Com o aplicativo aberto em sua tela inicial, o professor apresentará aos alunos os módulos disponíveis, destacando que, para esta atividade, serão utilizados os módulos de visualização e planificação (ver Figura 1). Explique brevemente a função de cada um dos módulos, mostrando como o primeiro permite observar os sólidos em três dimensões e como o segundo possibilita explorar suas planificações.

Nesse momento, o professor deverá disponibilizar aos alunos os *QR codes* impressos, explicando que, a partir deles, será possível acessar os sólidos que serão trabalhados: **cubo, paralelepípedo, pirâmide quadrangular, cone e cilindro**. Recomenda-se entregar uma cópia de cada *QR code* para cada grupo, garantindo que todos tenham acesso às mesmas figuras.

Figura 1 – Interface do aplicativo Sólidos RA.

Segue na próxima página a Figura 2, na qual os códigos necessários para a atividade estão dispostos em tamanho ideal para impressão e uso. Os mesmos códigos podem ser utilizados, tanto no módulo de visualização, quanto no módulo de planificação.

Figura 2 – Códigos QR relativos aos sólidos a serem trabalhados

CUBO

CILINDRO

CONE

PIRÂMIDE

PARALELEPIPEDO

Com todos os materiais preparados, oriente os alunos a acessarem o primeiro módulo, destinado à visualização dos sólidos. Solicite que cada grupo explore, de forma individual e coletiva, todos os sólidos disponíveis. Após abrirem o módulo, instrua os alunos a apontarem a câmera para o $QR\ code$ correspondente, garantindo que o sólido seja carregado corretamente no aplicativo. Incentive-os a observar e analisar de maneira crítica e atenta os seguintes aspectos de cada sólido:

- Quantidade de faces, vértices e arestas;
- Formas geométricas que compõem cada face.

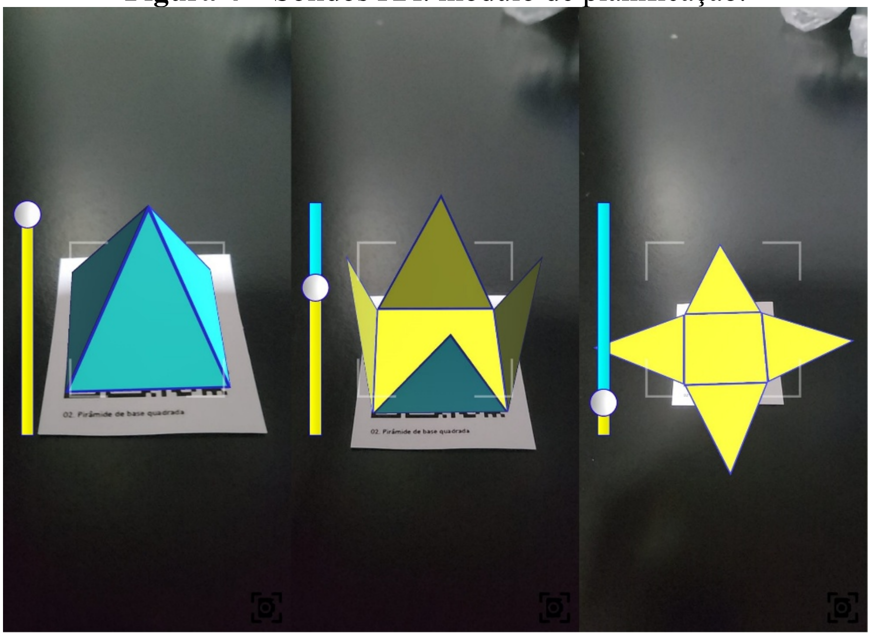
Ressalte a importância de se discutir as características verificadas nos sólidos, promovendo o desenvolvimento do raciocínio geométrico e da percepção tridimensional.

Após a visualização inicial, oriente os alunos a alterarem o modo de visualização, utilizando o comando disponível no canto superior esquerdo da tela, conforme ilustrado na Figura 3. Para cada sólido, o aplicativo disponibiliza cinco formas diferentes de visualização, permitindo aos alunos explorarem diferentes perspectivas e aprofundarem a compreensão das características tridimensionais de cada figura.

Figura 3 – Sólidos RA: alterando o modo de visualização.

Para finalizar as visualizações, oriente os alunos a acessarem o segundo módulo, destinado à planificação dos sólidos, utilizando os mesmos códigos já disponibilizados. Assim, como na etapa anterior, cada grupo deve visualizar a planificação de todas as figuras. Incentive-os a utilizar o controle deslizante localizado no lado esquerdo da tela (ver Figura 4), para ajustar a abertura da figura, observando atentamente como as faces se distribuem no plano e como se relacionam com a forma tridimensional original.

Figura 4 – Sólidos RA: módulo de planificação.



Para concluir a primeira etapa, recomenda-se proporcionar aos alunos um período de debate entre os grupos. Nesse momento, o professor pode realizar perguntas direcionadas, como, por exemplo, ‘Qual a quantidade de faces de determinado sólido?’, ou propor que cada grupo formule uma pergunta ou compartilhe observações e reflexões sobre a atividade realizada. Essa etapa visa estimular a participação, o pensamento crítico e a troca de conhecimentos, consolidando a compreensão das características dos sólidos geométricos explorados.

Etapa 2 – Construção de modelos manipuláveis

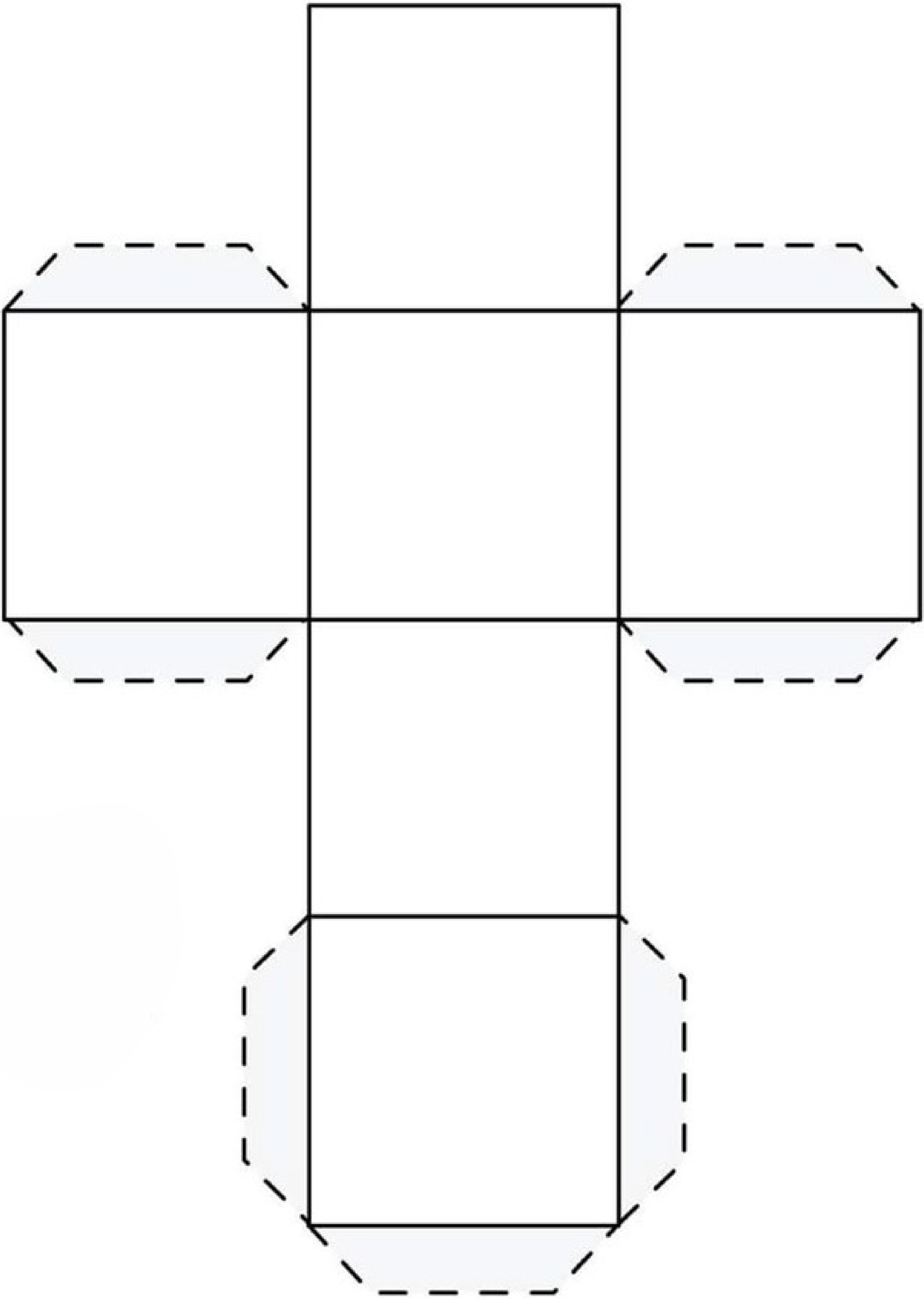
- **Objetivo:** Consolidar a compreensão das propriedades geométricas por meio da construção e manipulação física dos sólidos.
- **Recursos:** Planificações, papel cartão, tesoura, régua, cola.
- **Duração:** 50 minutos, podendo ser ajustado conforme a realidade da turma.

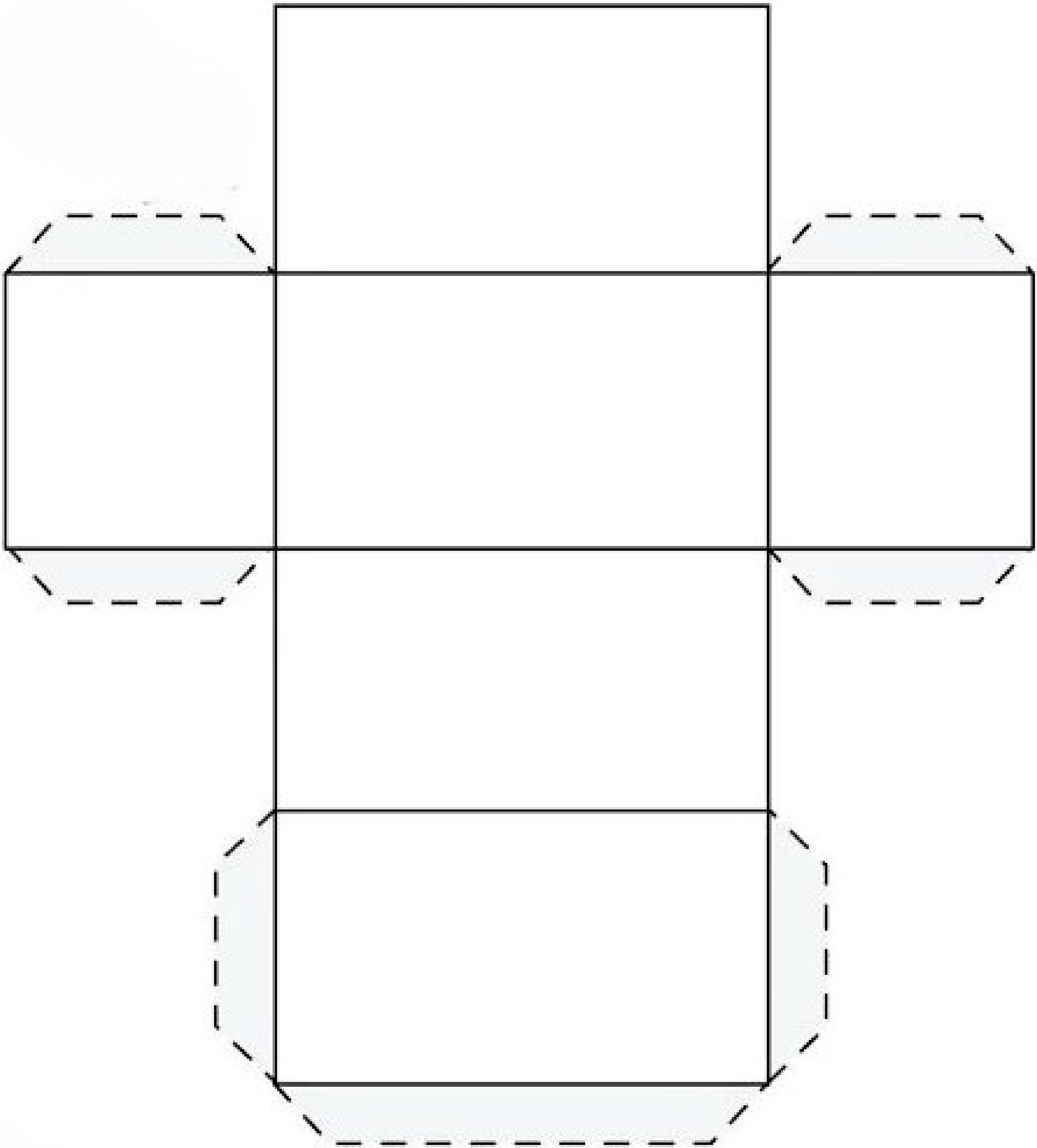
❖ **Descrição da atividade:**

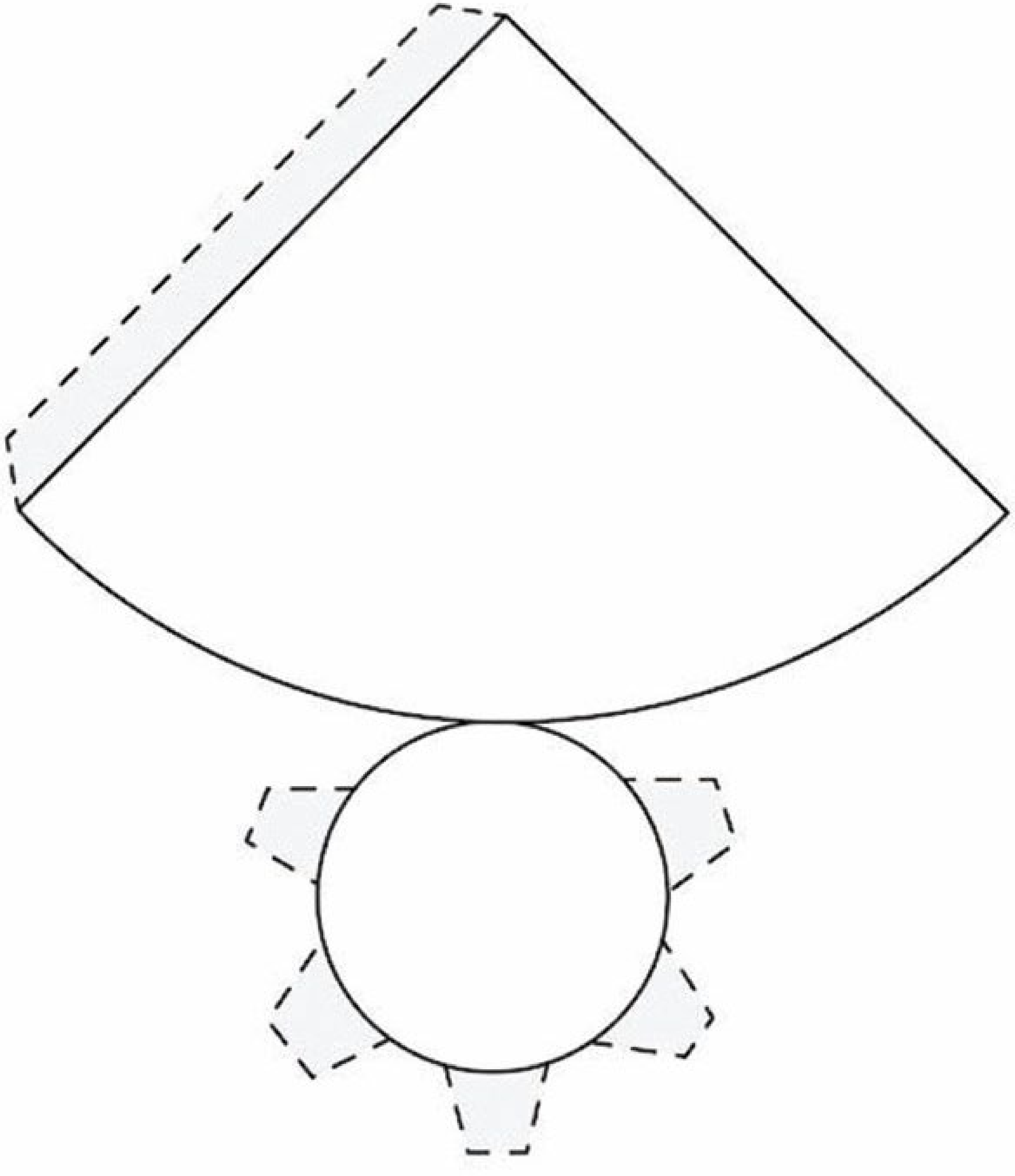
Para dar início a esta etapa, mantendo os mesmos grupos da etapa anterior, o professor deve disponibilizar a cada grupo planificações prontas para recorte. Caso deseje, essas planificações também podem ser utilizadas como moldes para a construção dos modelos em papel mais resistente, como o papel cartão, garantindo maior durabilidade e facilidade na manipulação pelos alunos. Segue abaixo (ver próximas páginas) as planificações em formato A4, prontas para a impressão.

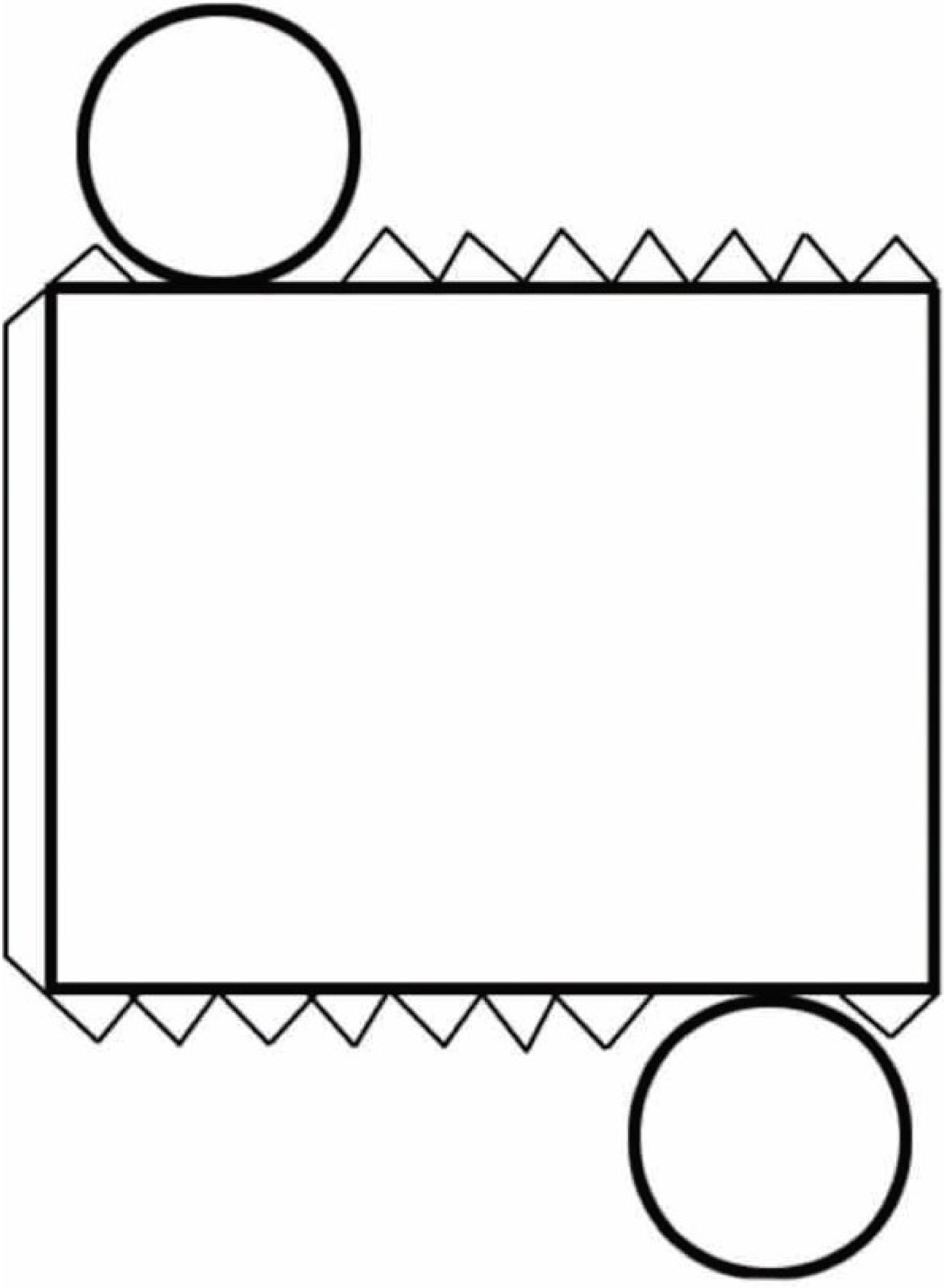
Essa atividade consolida a etapa anterior, permitindo com que os estudantes relacionem as observações feitas nos módulos de visualização e planificação digitais com a construção física dos sólidos. Ao recortar, dobrar e montar os modelos, os alunos reforçam a compreensão das faces, vértices e arestas, bem como a percepção espacial e tridimensional, promovendo uma aprendizagem prática, significativa e integrada.

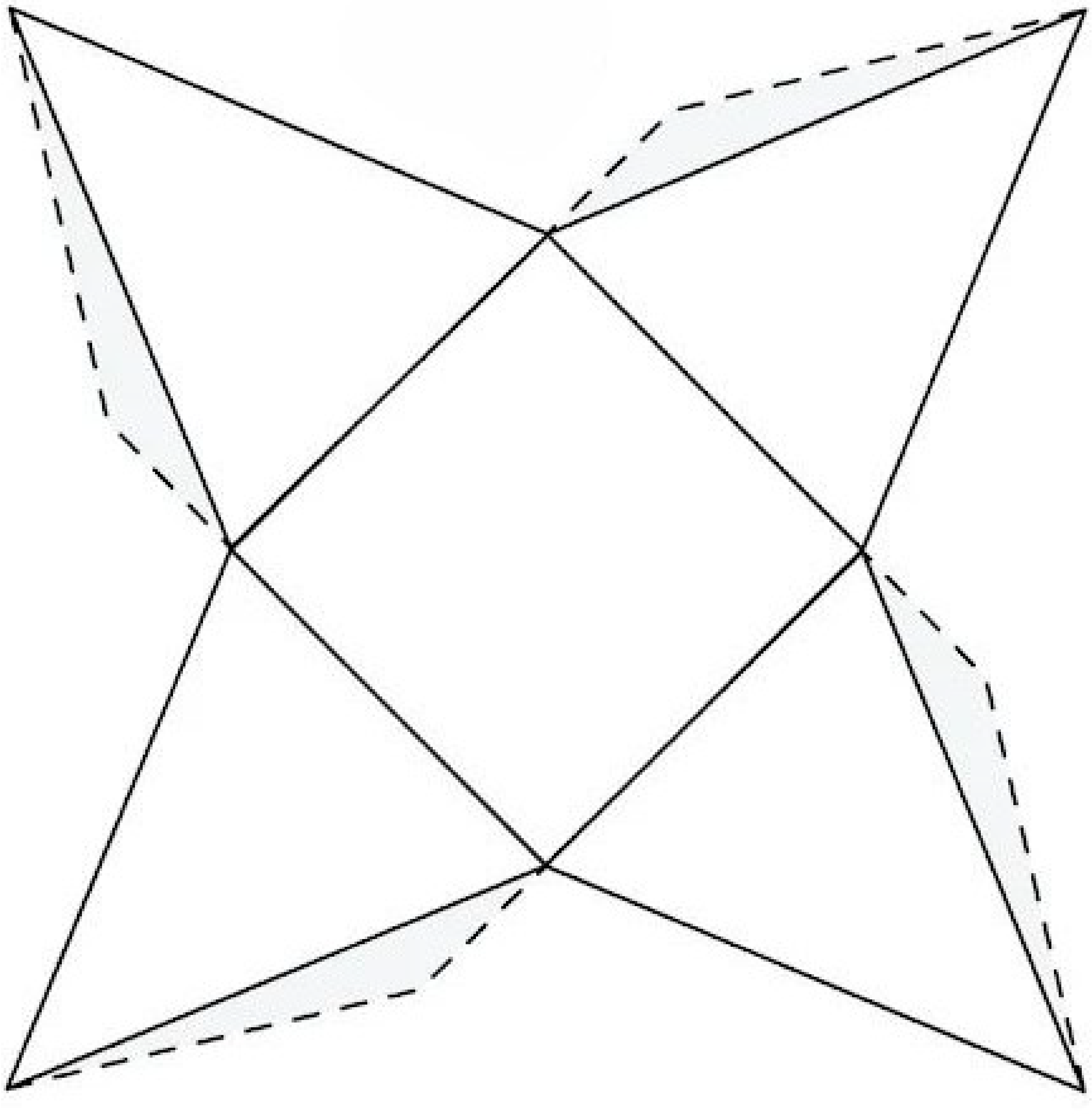
Para otimizar o tempo e tornar a atividade mais ágil, recomenda-se que cada grupo produza de dois a três modelos. Ao final da etapa, os grupos socializam seus sólidos com os demais, apresentando suas observações e experiências durante a construção. Essa socialização favorece a troca de conhecimento, reforça a compreensão das propriedades dos sólidos geométricos e promove o desenvolvimento de habilidades de comunicação e trabalho em grupo.











Etapa 3 – Introdução às fórmulas de área e volume

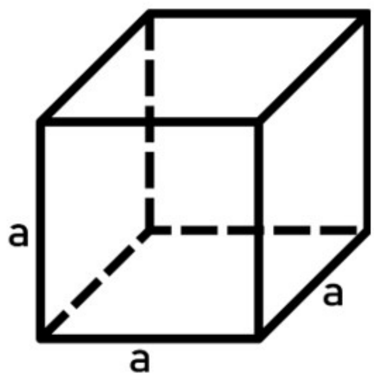
- **Objetivo:** Apresentar e discutir as fórmulas de cálculo de área e volume, relacionando-as aos sólidos trabalhados.
- **Atividades:** Aula expositiva dialogada, com a apresentação das fórmulas de área de superfície e de volume de cada sólido; resolução de exemplos no quadro com a participação ativa dos alunos.
- **Recursos:** Quadro branco, pincéis, modelos manipuláveis construídos pelos alunos na etapa anterior.
- **Duração:** 50 minutos, podendo ser ajustado conforme a realidade da turma.

❖ **Descrição da atividade:**

Para dar início a esta etapa, o professor pode apresentar no quadro as fórmulas para o cálculo de área de superfície e de volume dos sólidos ou, se preferir, pode imprimir e entregar um formulário para cada aluno. Essa medida tem como objetivo fornecer o suporte teórico necessário para que os estudantes possam relacionar as propriedades geométricas observadas na etapa 1 e no processo de construção dos modelos com os cálculos matemáticos correspondentes, promovendo uma aprendizagem integrada entre prática e teoria. O formulário de apoio com as fórmulas de área de superfície e de volume, pronto para impressão, encontra-se na próxima página.

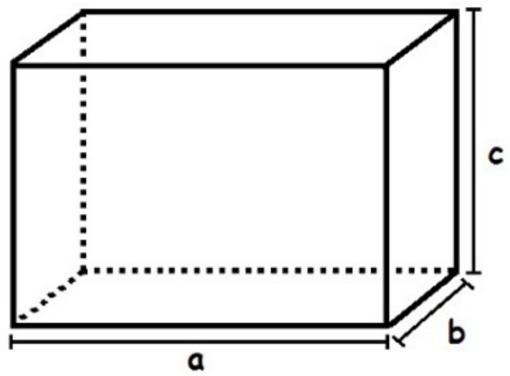
FÓRMULAS

CUBO



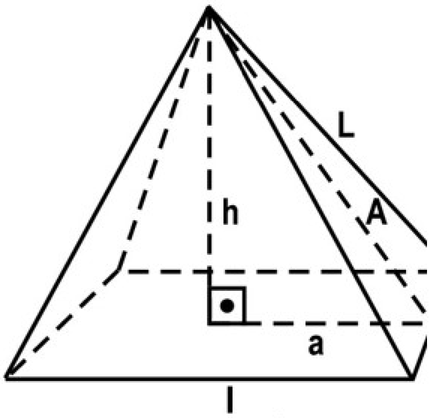
$$A_T = 6a^2$$
$$V = a^3$$

PARALELEPÍPEDO



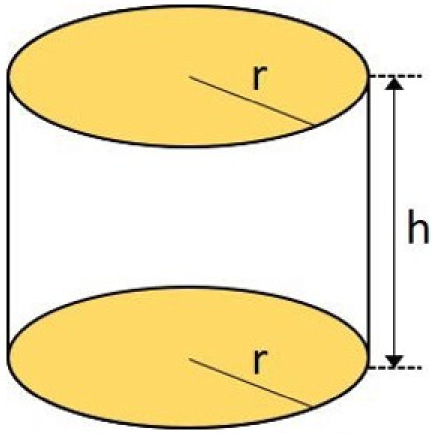
$$A_T = 2ab + 2bc + 2ac$$
$$V = abc$$

PIRÂMIDE



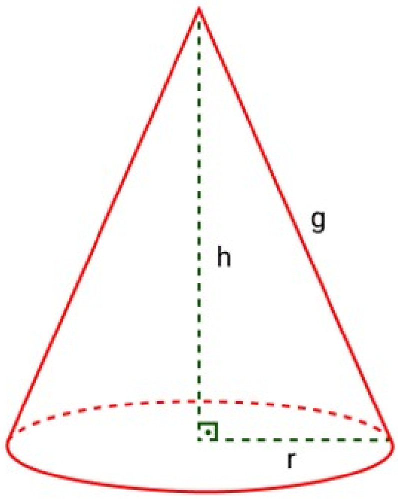
$$A_T = l^2 + 4\frac{l \cdot A}{2}$$
$$V = l^2 \cdot h$$

Cilindro



$$A_T = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$
$$V = \pi r^2 \cdot h$$

CONE



$$A_T = \pi r^2 + \pi rg$$
$$V = \pi r^2 \cdot h$$

Exemplos de exercícios para serem resolvidos pelos:

1. Um cubo possui aresta de 4 cm.

a) Calcule a área da superfície do cubo.

b) Calcule o volume do cubo.

2. Um paralelepípedo possui comprimento de 5 cm, largura de 3 cm e altura de 2 cm.

a) Calcule a área da superfície.

b) Calcule o volume.

3. Um cilindro possui raio de 3 cm e altura de 7 cm.

a) Calcule a área da superfície.

b) Calcule o volume.

4. Um cone possui raio de 3 cm e altura de 4 cm e geratriz medindo 5 cm.

b) Calcule a área da superfície.

c) Calcule o volume.

5. Uma pirâmide possui base quadrada com lado de 4 cm e altura da pirâmide de 6 cm. A altura lateral (do vértice até o meio da aresta da base) é de 5 cm.

a) Calcule a área da superfície.

b) Calcule o volume da pirâmide.

Etapa 4 – Aplicação prática das fórmulas

- **Objetivo:** Aplicar, de forma prática, as fórmulas de área de superfície e volume estudadas na etapa anterior, utilizando as medidas obtidas nos modelos sólidos construídos pelos alunos na etapa 2.
- **Recursos:** Régua, calculadora, modelos construídos na etapa 2 e fórmulas para os cálculos.
- **Duração:** 50 minutos.

❖ **Descrição da atividade:**

Nessa última etapa, os alunos, permanecendo nos grupos já formados desde a primeira atividade, deverão utilizar uma régua para realizar as medições das dimensões dos modelos sólidos construídos por eles na etapa 2. Com base nas medidas coletadas, aplicarão as fórmulas de área de superfície e volume apresentadas na etapa 3, registrando os cálculos em seus cadernos.

Para orientar o trabalho, o professor poderá iniciar a atividade realizando um exemplo coletivo no quadro. Escolhendo um dos modelos, por exemplo, o cubo, o docente mostrarão como medir a aresta, substituir o valor na fórmula e mostrar passo a passo como calcular área e volume. Essa ação inicial funciona como referência para que os grupos realizem suas próprias medições e cálculos de forma autônoma.

Durante a atividade, o professor deve circular entre os grupos, auxiliando na tomada correta das medidas e verificando se os cálculos estão sendo aplicados adequadamente. É importante incentivar com que os alunos discutam entre si, confiram os resultados e comparem suas respostas com outros grupos.

Ao término, cada grupo deverá apresentar à turma os resultados referentes a pelo menos um dos sólidos trabalhados, destacando as estratégias utilizadas e as dificuldades encontradas. Essa socialização final permite identificar possíveis divergências nos resultados e discutir fatores que podem justificar variações, como pequenas imprecisões nas medições ou arredondamentos numéricos.

Essa etapa tem como objetivo consolidar a articulação entre a manipulação concreta, a visualização digital e a formalização matemática, proporcionando uma experiência prática de mensuração, cálculo e interpretação dos resultados, além de reforçar a importância da precisão nos processos de resolução de problemas em Geometria.